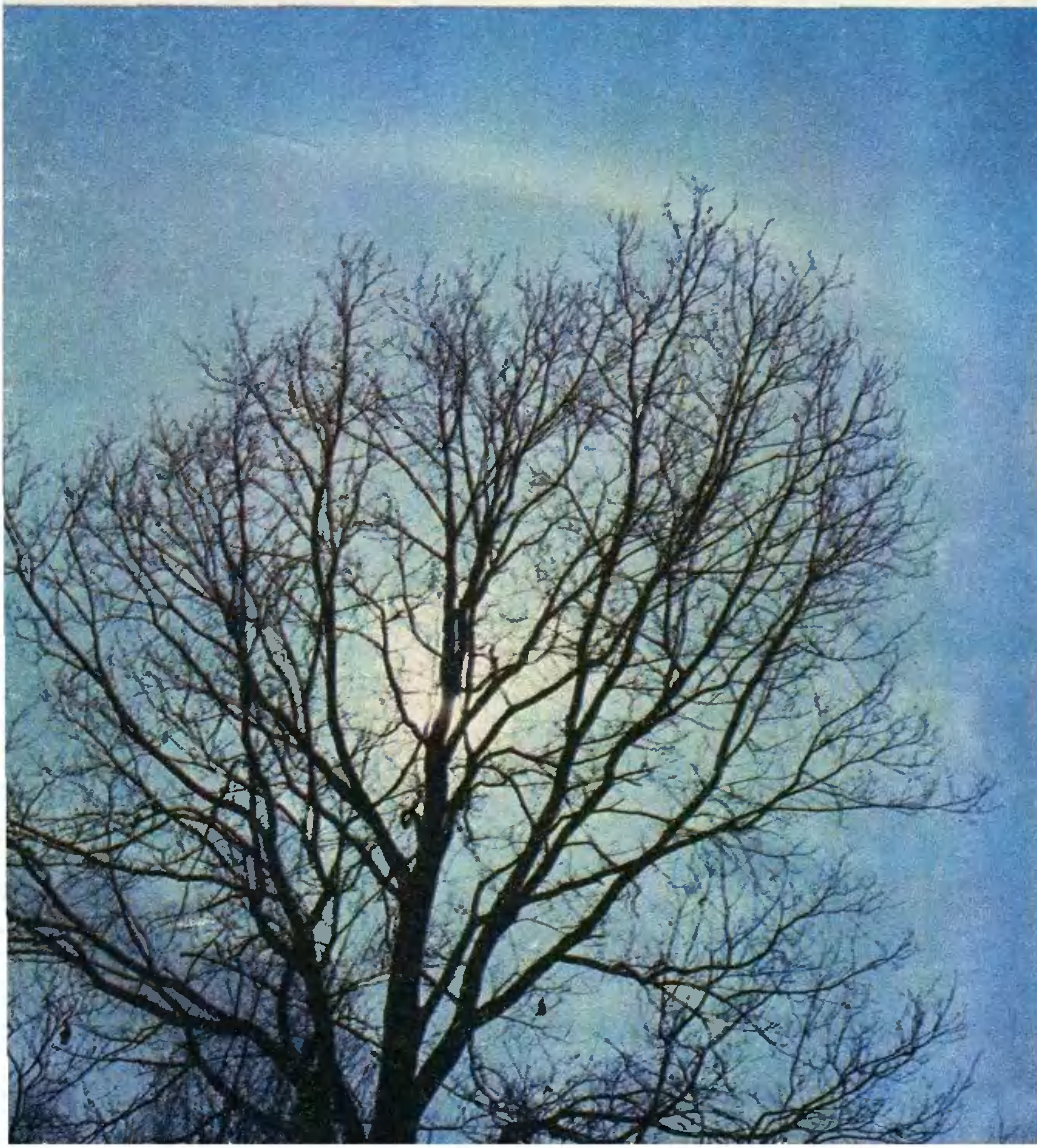
ISSN 0130-2221

Квант

11
1984

*Научно-популярный физико-математический журнал
Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР*



XVIII Всесоюзная олимпиада школьников по математике и физике
(Ашхабад, Ереван, апрель 1984 г.).

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Квант 11 1984

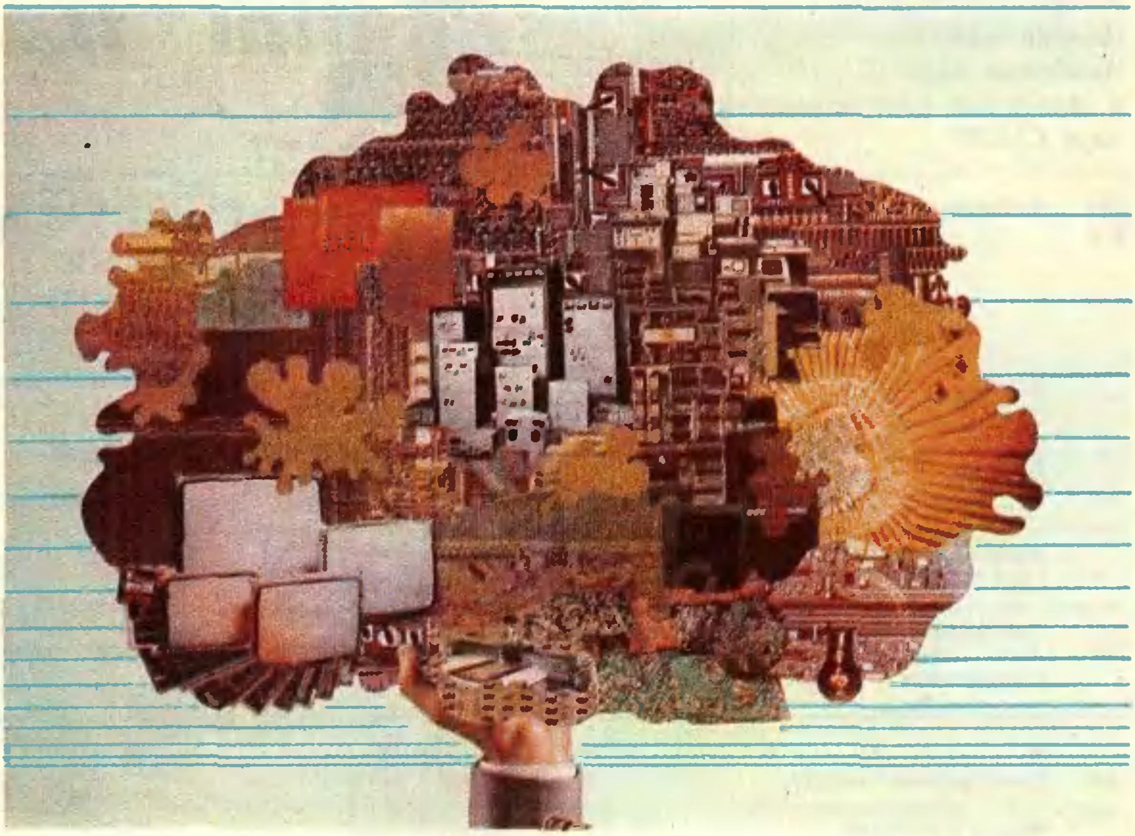
Основан в 1970 году

Издательство „Наука". Главная редакция физико-математической литературы

В НОМЕРЕ: / IN THIS ISSUE:

2	*Д. Г. Крутогин, Л. М. Летюк, А. Т. Морченко.* Магнитная память ЭВМ	*D. G. Krutogin, L. M. Letyuk, A. T. Morchenko.* Magnetic computer memory
10	*С. Г. Гиндикин.* Высокой геометрии начала...	*S. G. Gindikin.* Thus "high geometry" began...
	Новости науки	**Science news**
9	Гало и лед	Halo and ice
	Лаборатория «Кванта»	**Kvant's lab**
19	*А. А. Лапидес.* Несколько опытов с объективом	*A. A. Lapides.* A few experiments with camera lenses
	Наш календарь	**Our calendar**
23	Спектральный анализ	Spectral analysis
	Школа в «Кванте»	**Kvant's school**
24	Физика 8, 9, 10	Physics 8, 9, 10
29	Математика, 8, 9, 10	Mathematics 8, 9, 10
32	Избранные школьные задачи	Selected school problems
	«Квант» для младших школьников	**Kvant for younger school children**
33	Задачи	Problems
34	Задача в картинках	A problem in pictures
	Задачник «Кванта»	**Kvant's problems**
35	Задачи М891 — М895; Ф903 — Ф907	Problems M891 — M895; P903 — P907
38	Решения задач М876 — М878, М880; Ф887 — Ф889	Solutions M876 — M878, M880; P887 — P889
	Олимпиады	**Olympiads**
45	*Л. П. Купцов, С. В. Резниченко, А. Б. Сосинский.* XVIII Всесоюзная олимпиада по математике	*L. P. Kuptsov, S. V. Reznichenko, A. B Sossinsky.* XVIIIth All-Union mathematics olympiad
49	*Ю. А. Самарский, Л. В. Чернова.* XVIII Всесоюзная олимпиада по физике	*Yu. A. Samarski, L. V. Chernova.* XVIIIth All -Union physics olympiad
52	*В. А. Орлов, А. Г. Ростомян.* Экспериментальный тур олимпиады по физике	*V. A. Orlov, A. G. Rostomian.* Experimental stage of the Physics olympiad
56	Призеры XVIII Всесоюзной олимпиады школьников	Prizewinners of the All-Union school olympiad
58	**Ответы, указания, решения**	**Answers, hints, solutions**
	Смесь *(9, 43, 44, 57)*	**Miscellaneous** *(9, 43, 44, 57)*
	Шахматная страничка	**The chess page**
	Этюды Каспаряна *(3-я с. обложки)*	Kasparian's etudes *(3rd cover page)*

Фотография, приведенная на первой странице обложки, получена в ясный морозный январский день. Яркая светящаяся дуга на фоне неба — это солнечное гало. Об этом красивом природном явлении можно прочитать в статье «Гало и лед».



Магнитная память ЭВМ

Кандидат технических наук Д. Г. КРУТОГИН, доктор технических наук Л. М. ЛЕТЮК, А. Т. МОРЧЕНКО

Наше время — начало эпохи ЭВМ. Зародившись около сорока лет назад, племя компьютеров быстро набрало силы, широко внедрилось в самые различные сферы человеческой деятельности, от кассовых аппаратов до расчетов космических трасс. Микроэлектроника в последние годы позволила так резко снизить размеры ЭВМ и повысить их надежность, что взгляд на ЭВМ как на экзотическую роскошь стал уходить в область преданий.

Цель и необходимость применения ЭВМ — освобождение человеческого мозга от рутинных мыслительных операций. Компьютер кое в чем заменяет мозг, но методы работы у них существенно различны. Особенность строения и функционирования современных ЭВМ в том, что самые сложные задачи в них расчленяются на последовательность простейших арифметических операций. Зато скорость выполнения огромна — арифметические устройства ЭВМ, которые называются процессорами, совершают *миллионы операций в секунду*. И промежуточные, и окончательные результаты расчетов на некоторое время нужно запомнить, как запоминаем мы цифру «в уме» при умножении в столбик. Поэтому любая ЭВМ, и самая большая, и микрокалькулятор, имеет собственную память, точнее говоря — запоминающие устройства.

В запоминающих устройствах (ЗУ) хранится всё, что нужно ЭВМ для вычислений. Чем больше должна знать и помнить ЭВМ, тем больше объем ее ЗУ, и тем больше масса машины и ее цена. Память составляет бо́льшую часть объема и стоимости ЭВМ (до 60—80 %). К тому же большая память подобна большой библиотеке, в которой время поиска и доставки требуемой книги иногда превышает время пользования сею.

«Мозг, хорошо устроенный, стóит больше, чем мозг, хорошо наполненный»

Вряд ли средневековый французский философ Монтень, которому принадлежит это высказывание, предвидел появление электронного мозга, но к вычислительным машинам, их системам памяти его афоризм подходит не меньше, чем к мозгу человека.

Эффективность ЭВМ зависит от двух показателей: объема информации, которую хранят и перерабатывают запоминающие устройства, и скорости выполнения элементарных операций с единицами этой информации. Емкость запоминающих устройств и их быстродействие на сегодняшний день находятся в противоречии: чем выше емкость — тем ниже относительное быстродействие. Чтобы сгладить это противоречие, комплекс запоминающих устройств ЭВМ строят из 3-4 систем с различным сочетанием конкурирующих параметров.

Наиболее быстродействующие запоминающие устройства — их называют оперативными (ОЗУ) — записывают или прочитывают (сообщают) порцию информации за одну микросекунду (10^{-6} с), а иногда и быстрее. ОЗУ запоминают промежуточную информацию, которую в процессе работы непрерывно сообщает процессор. Емкость ОЗУ составляет до 10^6—10^7 бит.

Словом «бит» обозначают наименьшую порцию информации, получаемую при осуществлении одного из двух равновероятных событий. Так, например, сообщение о том, что брошенная монета упала гербом вверх или вниз, несет информацию в 1 бит. Еще пример, более близкий к практике и к предмету нашего разговора. В вычислительной технике информация, как правило, «закодирована» в виде чисел, записанных в двоичной системе счисления, с помощью двух цифр — 0 и 1. Чтобы в этой системе записать, например, число 7, представим его сначала в виде суммы

$$7=2^2\cdot 1+2^1\cdot 1+2^0\cdot 1,$$

а затем запишем последовательно количество целых степеней числа 2 в каждом разряде. Получается комбинация цифр 111. Таким образом, числу 7 десятичной системы соответствует в двоичной системе число 111, или $[7]_{10}=[111]_2$. Аналогично, $8=2^3\cdot 1+2^2\cdot 0+2^1\cdot 0+2^0\cdot 0$, или $[8]_{10}=[1000]_2$. Как видим, каждая цифра — 1 или 0 — несет информацию о наличии в десятичном числе целых степеней числа 2. Для записи чисел от 4 до 7 достаточно трех знаков — трех битов, для чисел от 8 до 15 — четырех и т. д. (Само слово «бит» образовано от английских слов "BInary digiT" — «двоичная цифра».)

Память ЭВМ состоит из элементов, способных запоминать значения битов (0 или 1). Такой выбор кода записи в вычислительной технике связан с тем, что в физическом мире наиболее просто реализуются системы, обладающие двумя устойчивыми состояниями.

Минимальное быстродействие (10^{-2}—10^{+2} с) при максимальной емкости (до 10^{12} бит) имеют внешние запоминающие устройства (ВЗУ) ЭВМ. Они хранят информацию о поставленной задаче, введенных данных, программе решения, получаемых результатах, контроле режима работы машины. (Внешними их называют потому, что в больших машинах они отделены от оперативных ЗУ). ВЗУ называют также долговременными запоминающими устройствами (ДЗУ).

Между оперативными и внешними системами находятся так называемые буферные запоминающие устройства (БЗУ) со средними значениями емкости и быстродействия (10^7—10^9 бит и 10^{-5}—10^{-3} с соответственно).

Сочетание этих систем (расположенных на «служебной лестнице» в порядке подчиненности) называется иерархией памяти ЭВМ. Как правило, более развитая память имеет более сложную иерархию, сложные связи между отдельными системами ЗУ.

В принципе, человеческая память содержит основные элементы иерархии: ОЗУ, БЗУ, ДЗУ. Так, многие вещи мы помним и умеем делать всю сознательную жизнь: говорить, писать и т. п. Наше ДЗУ (к счастью, не внешнее) хранит информацию, делающую нас разумными существами. Другой пример: вы неплохо помните задание на завтра (если, конечно, заглянули в учебник). Через год, а то и через месяц, почти все детали урока забудутся, лишь очень малая часть информации перейдет из буферной системы в долговременную; мозг избегает перегрузок бесполезными сведениями и сохраняет свободными некоторое число ячеек памяти для предстоящей работы.

Человеческий мозг — эта весьма универсальная вычислительная система — имеет биологические ЗУ, структура которых нам далеко не ясна; поэтому биосистемы в кибернетике пока «осваивают» только писатели-фантасты.

Из чего построить «мозг»?

Какие же требования предъявить к искусственным системам памяти? Чем заменить нервные клетки мозга? Нужны малые габариты и масса, нужно высокое быстродействие, обязательно нужна реверсивность памяти, то есть способность к быстрой замене информации (перезаписи). Наконец, если эти требования выполнены, хорошо иметь системы, не требующие больших затрат энергии на управление, обладающие высокой надежностью и т. д.

Вообще говоря, запоминающие устройства можно построить на различных принципах: механическом, акустическом, электронном, магнитном, оптическом. Но... Механические ЗУ не устраивают нас по быстродействию, хотя изобретателю конторских счетов — простейшего запоминающего устройства — мы должны выразить признательность за первое техническое воплощение поразрядного принципа хранения информации, создание реверсивной среды для записи и т. д. Довольно высокой емкостью, надежностью, помехозащищенностью обладают граммофонные пластинки. Но для ЗУ ЭВМ пластинки не очень удобны: нет нужного быстродействия и совсем плохо с реверсивностью памяти.

Давно известен магнитный метод записи электрических сигналов. Он основан на свойстве некоторых материалов «запоминать» магнитное поле, в котором они побывали. Наверное, многим из вас приходилось намагничивать гвозди, иголки, ножницы и т. п., поднося их к постоянному магниту. И вы, возможно, обращали внимание, что ножницы после этого сами становятся хорошим магнитом — они притягивают к себе разную железную мелочь; намагниченная иголка может служить стрелкой компаса; а гвозди, если их отнести от магнита, быстро теряют свои магнитные свойства. Не все магнитные материалы обладают способностью «запоминать» магнитное поле; но один из них — минерал магнетит, представляющий собой сложный оксид железа,— известен людям больше тысячи лет и послужил первым материалом для компасов.

Особенно хорошо намагничиваются мелкие иглообразные частицы — побывав в магнитном поле, они могут запомнить и его индукцию, и его направление. Если такую намагниченную частицу пронести мимо замкнутого проводящего витка, в нем возникнет индукционный ток.

На этом свойстве магнитных материалов основана работа магнитофона. Носителем магнитных частиц служит пластмассовая лента, на которой в тонком слое лака закреплены иглообразные частицы магнитного порошка (длина частиц порядка микрона, диаметр — порядка десятой доли микрона). Вместо проводящего витка используется маленький электромагнит — головка записи и воспроизведения: по нашему желанию он либо намагничивает частицы порошка (запись), либо сам намагничивается полем проходящей мимо намагниченной частицы, и в его обмотке возникает ток, повторяющий по форме ранее записанный сигнал (воспроизведение).

Магнитофон появился на свет почти одновременно с телефоном — около ста лет назад. Но обеспечить хорошее качество записи удалось лишь в сороковых годах нашего века.

В вычислительных машинах магнитофон сразу нашел себе место. Каждая порошинка может нести 1 бит информации: намагниченной порошинке можно приписать значение 1, не намагниченной — 0. Понятно, что емкость и быстродействие такого устройства памяти зависят от длины ленты и скорости ее протяжения.

Переделка магнитофона позволила резко повысить быстродействие записи. Вместо магнитной ленты сигналы записывают на диске, покрытом магнитным лаком. Диск, диаметр которого около 0,5 м, вращается со скоростью 100 оборотов в секунду. Головка записи-считывания и поверхность диска не соприкасаются (иначе при таких скоростях они в результате трения сильно разогревались бы и быстро изнашивались). Головка парит над диском на расстоянии всего 2—5 мкм. Для качественной передачи сигнала важно, чтобы расстояние это было постоянно, поэтому диск не должен иметь заметных биений. Дисковый магнитофон любит чистый воздух — попадание в двухмикронный зазор трехмикронной пылинки, которую и глазом-то не увидишь, вызывает последствия, эквивалентные по значительности попаданию крупного булыжника под бешено мчащийся автомобиль.

С помощью дисковых магнитофонов можно удовлетворить потребности буферных ЗУ по емкости и быстродействию.

Ферритовое колечко — элемент памяти

В оперативных ЗУ основными элементами памяти долгое время были

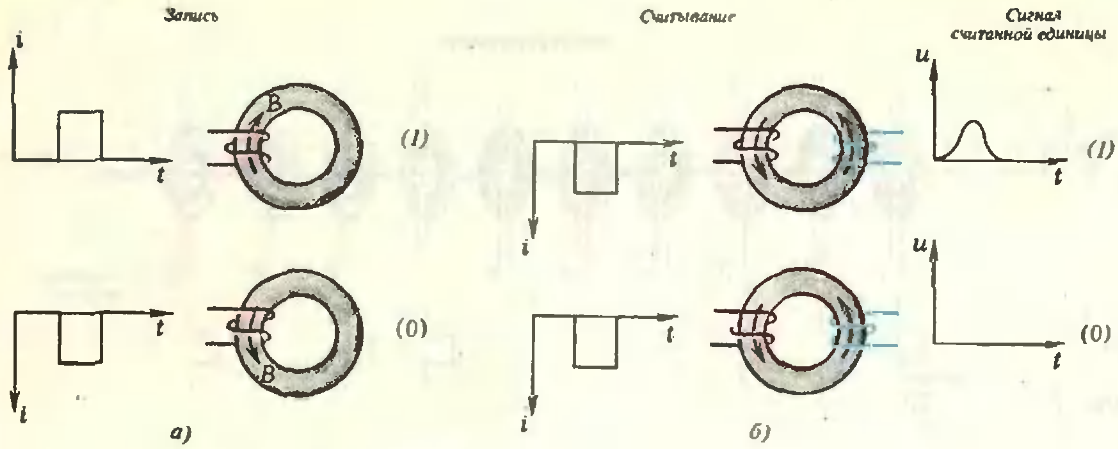


Рис. 1.

магнитные кольца. Такие кольца, сделанные из железоникелевого сплава или ферритов (неметаллических магнитных материалов), обладают свойством находиться в течение длительного времени в состоянии остаточной намагниченности. При этом индукция магнитного поля в материале кольца по направлению совпадает с индукцией внешнего поля, в котором кольцо намагничивалось, а по величине близка к ней.

Представим себе, что мы намагнитили кольцо, пропустив по намотанному на него проводу импульс тока, а по обмотке второго кольца пропустили импульс тока в противоположном направлении (рисунок 1, *а*). Тогда векторы индукции магнитных полей, возникающих в кольцах при намагничивании, будут направлены в противоположные стороны. Одному состоянию можно приписать значение 1, а другому — 0. Подадим теперь на оба кольца одинаковые по полярности импульсы тока. Одно кольцо (верхнее на рисунке 1, *б*) перемагнитится — за короткое время направление индукции магнитного поля в кольце изменится на противоположное. Изменение индукции означает изменение магнитного потока, пронизывающего любое сечение кольца. Следовательно, в намотанной на кольцо вторичной обмотке — обмотке считывания — при перемагничивании возникнет ЭДС индукции. Если вторичная обмотка замкнута, по ней протечет импульс тока — импульс «считанной» единицы. Таким образом, мы прочитали число, записанное в первом кольце, и стерли его, то есть разрушили информацию. А что же второе кольцо? Оно не перемагничивается, так как уже было ранее намагничено с заданным направлением вектора индукции. Отсутствие импульса от второго кольца — это тоже информация, но о числе 0. Таким образом, каждое кольцо — это элементарное запоминающее устройство емкостью в 1 бит.

Магнитная память на кольцевых сердечниках работает довольно быстро — время перемагничивания колец составляет доли микросекунды. Емкость памяти зависит от числа колец. Для оперативного ЗУ на 1 мегабит требуется не менее миллиона колец, а в некоторых случаях и более двух миллионов. Сделать такое количество колец можно, процессы эти автоматизированы. Далее нужно каждое кольцо испытать, потому что если одно из миллиона колец «врет» — всей системе грош цена. Были созданы машины, испытывающие до 5 тысяч колец в час, но и это еще не главная трудность.

Магнитные кольца надо снабдить обмотками записи и считывания, а затем организовать в некую систему, чтобы иметь возможность определить, какому именно кольцу соответствует данный бит информации. Миллион колец с двумя обмотками — это два миллиона проводов и четыре миллиона контактов. Избавиться от этого изобилия помогает матричная система построения ЗУ. Нанижем десяток колец на один провод, который назовем числовым (рисунок 2). Теперь все кольца можно намагнитить одним импульсом, и во всех кольцах запишется 0. Через каждое кольцо пропустим провод перпендикулярно числовому; эти десять проводов назовем разрядными. Конструкцию, которую мы получили, называют числовой линейкой. Чтобы записать в ней двоичное число 111000110l (что это за число

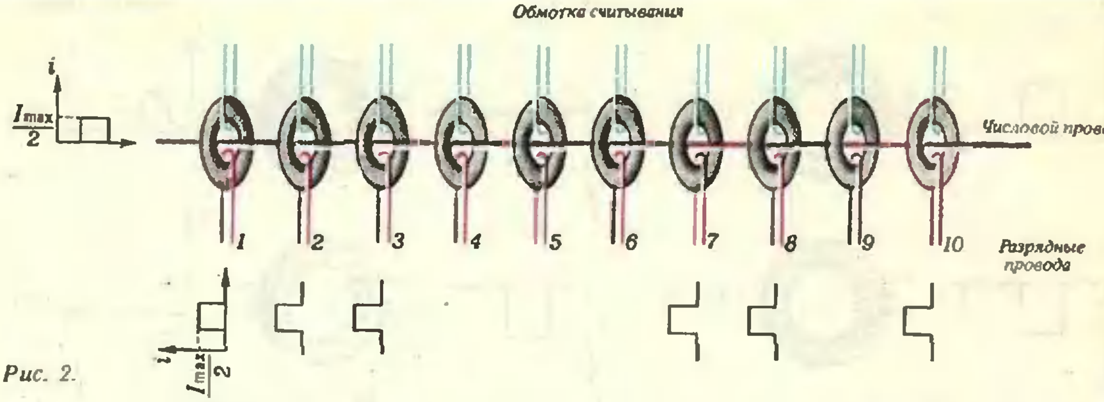


Рис. 2.

в десятичной системе?), пошлем по числовому проводу импульс, равный по величине половине перемагничивающего значения тока, а другой такой же импульс одновременно пошлем в разрядные провода колец 1, 2, 3, 7, 8 и 10. Там, где импульсы сложатся, кольца перемагнитятся; в кольцах 4, 5, 6 и 9 этого не произойдет. «Считать» все число можно, пропустив большой «отрицательный» (перемагничивающий) импульс по числовому проводу. Но для того чтобы получить и обработать сигнал считывания, нужен еще один провод в каждом разряде — обмотка считывания. Итак, на десять колец числовой линейки мы имеем двадцать один провод. На десять числовых линеек, то есть на десять десятиразрядных чисел, нужно десять числовых проводов (разрядные и считывающие будут прежними) — итого — 31 провод и т. д. Тоже, конечно, немало, но все-таки для создания мегабитового ЗУ можно ограничиться несколькими сотнями проводов. Сложнее другое.

Пусть колечко (далеко не самое маленькое) имеет наружный диаметр 0,6 мм, внутренний — 0,35 мм. Теперь через каждое кольцо необходимо в разных направлениях протянуть минимум три провода диаметром 0,05 мм и повторить эту операцию более миллиона раз. Такая работа сродни шитью бисером (она и называется прошивкой). Толком автоматизировать ее, увы, не удалось, а ручной труд чрезвычайно замедлял производство и удорожал собираемые устройства.

Первые образцы ЗУ на магнитных кольцах даже небольшой емкости представляли собой кубы памяти в буквальном смысле слова — они имели объем около 1 м^3. По вполне понятным причинам стремятся уменьшить габариты запоминающих устройств. К настоящему времени удалось уменьшить наружный диаметр изготовляемых колец до 0,25 мм. Можно представить себе, насколько усложняется при этом задача их прошивки. Казалось бы, трудности дальнейшего уменьшения размеров кольцевых сердечников непреодолимы, и продолжавшееся двадцать пять лет господство магнитных ОЗУ заканчивается; тем более, что благодаря успехам микроэлектроники полупроводниковые ОЗУ стали эффективнее магнитных, то есть компактнее и дешевле.

В этом месте следует прервать рассказ об истории магнитной записи и представить электронные ячейки памяти. Давно известно, что из двух триодов можно собрать схему, которая «работает» в двух режимах: при одном направлении тока работает один триод, а второй оказывается запертым, а при другом направлении тока триоды меняются ролями. В одном режиме работы системе можно приписать значение 0, в другом — 1. Такая система называется триггером. У самых первых ЭВМ как раз триггеры (тысячи триггеров) и выполняли функции оперативной памяти; но они не выдержали конкуренции с более компактной, почти не выделяющей тепла, надежной, потребляющей мало энергии магнитной памятью.

Современные полупроводниковые микросхемы ЗУ, в основном, те же триггеры, только уменьшенные до микронных размеров. На пластине размером 5×5 мм, сделанной из полупроводникового кристалла, удается разместить запоминающее устройство емкостью в 200 000 бит; быстродействие таких ЗУ — порядка 10^{-8} с. Объективно отметим один весьма существенный недостаток электронных ОЗУ: выключение питания стирает всю накопленную информацию. Во многих случаях этот недостаток терпим, но иногда, например в военной или космической технике, становится серьезным препятствием.

Бег магнитных пузырьков

Около пятнадцати лет назад появились первые модели экспериментальных ЗУ в интегральном исполнении, сочетающие достоинство магнитной записи с эффективностью микроэлектронной технологии. Эти устройства, использующие движение магнитных доменов, получили название доменных ЗУ. Доменами называются малые области (объемы) магнитного вещества (например, железа), каждая из которых самопроизвольно полностью намагничена. Векторы индукции магнитных полей отдельных доменов в отсутствие внешнего магнитного поля направлены так, что в целом образец оказывается размагниченным.

Наиболее перспективным для создания доменных ЗУ оказалось применение так называемых цилиндрических магнитных доменов. Их историю следует начать с конца 50-х годов, когда в ряде магнитных материалов были обнаружены домены специфической формы, напоминающие воздушные пузырьки в плотницком уровне. Поэтому эти домены часто так и называют — магнитные пузырьки. Однако особый интерес к этим доменам стали проявлять только после того, как в октябре 1967 года появилась статья американского физика Эндрю Бобека, в которой он впервые указал на заманчивые перспективы их использования для создания устройств хранения и переработки информации. (Примечательно, что сам Бобек не являлся специалистом в области физики магнитных явлений, а занимался вычислительной техникой.)

Магнитные пузырьки могут возникать в тонких пластинках или пленках некоторых магнитных кристаллов. В исходном (размагниченном) состоянии доменная структура тонкого слоя таких кристаллов состоит из равного числа доменов с противоположными направлениями намагниченности — векторы индукции магнитных полей отдельных доменов перпендикулярны плоскости слоя и направлены в противоположные стороны.

На рисунке 3, *а* показана магнитная структура кристалла в размагниченном состоянии, называемая лабиринтной доменной структурой (снимок сделан под микроскопом). Темные и светлые участки — домены различной полярности. А фотографии 3, *б—е* сделаны в процессе намагничивания кристалла магнитным полем, индукция которого направлена в сторону наблюдателя. При увеличении индукции внешнего поля домены с намагниченностью, направленной по полю, растут, а против поля — наоборот сужаются. В некотором интервале внешних полей остатки «невыгодно» намагниченных доменов стягиваются сначала в эллиптические, а затем и в круговые «пузырьки». Области кристалла, занимаемые магнитными пузырьками, в сечении, перпендикулярном плоскости пленки или пластины, имеют очертания «пузатых» цилиндриков. Поэтому такие домены называют еще цилиндрическими. Дальнейшее увеличение индукции внешнего поля приводит к уменьшению диаметра «пузырьков», и при некотором критическом значении индукции B_0 «пузырьки» схлопываются, или, как говорят, аннигилируют,— цилиндрические магнитные домены (ЦМД) скачком перемагничиваются до того же состояния, в котором пребывает основная часть кристалла. Если же индукцию поля, приложенного к пластине, в которой уже имеются ЦМД, уменьшать, то при некотором значении поля начинает искажаться форма доменов — они становятся эллиптическими и затем превращаются

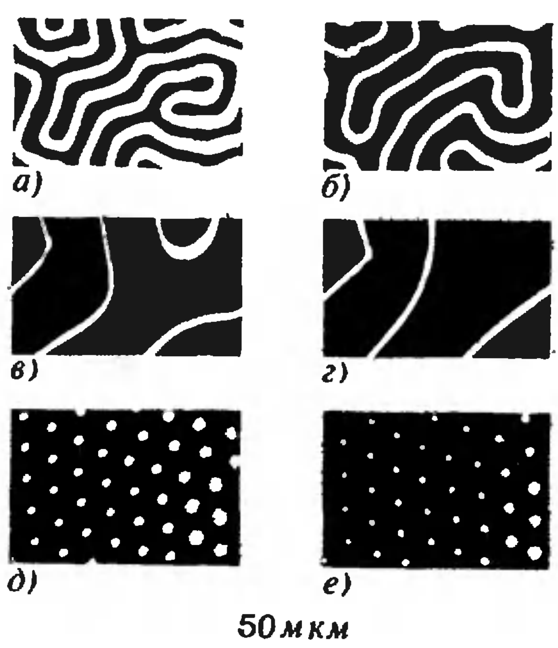


Рис 3

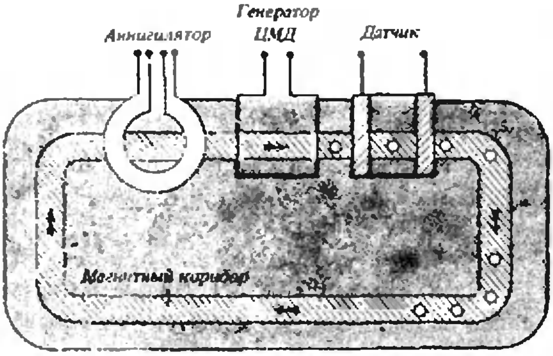


Рис. 4

в обычные полосовые домены лабиринтной структуры.

Итак, цилиндрические домены можно зарождать (генерировать), воздействуя на образец импульсным магнитным полем, которое возникает, например, при пропускании по витку импульса тока. Пропуская импульс обратной полярности, ЦМД можно уничтожить. Наличие или отсутствие в данной точке магнитной пластины цилиндрического домена эквивалентно 1 или 0 информации в этой точке.

Цилиндрические домены обладают еще одним замечательным свойством — их можно перемещать по пластине. Движутся они довольно быстро, подчас быстрее реактивного самолета, со скоростью до 500 м/с. Удобнее всего перемещать ЦМД магнитным полем, вектор индукции которого лежит в плоскости пластины. Чтобы придать их движению организованный, направленный характер, в пластине формируют специальные магнитные коридоры, в пределах которых только и могут двигаться домены. Запущенная в этот коридор последовательность ЦМД движется как единое целое, расстояния между соседними доменами при движении не изменяются. В отличие от магнитной ленты в этом случае информационная последовательность бежит в неподвижной магнитной среде.

Если магнитную дорожку (коридор) замкнуть в кольцо, получится аналогия с кольцом магнитной ленты или дорожкой дискового магнитофона, с той лишь разницей, что в ЦМД-кольце полностью отсутствуют движущиеся части, а размеры всего кольца составляют доли миллиметра.

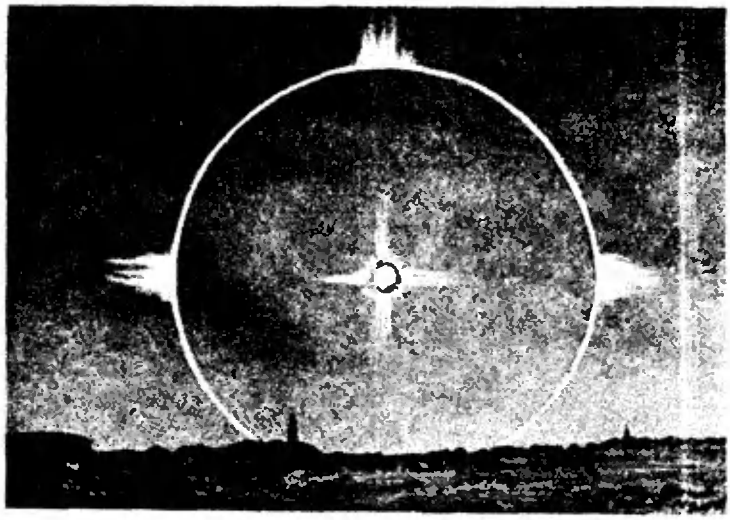
Для полной аналогии разместим на кольцевой ЦМД-дорожке (см. рисунок 4) генератор доменов (он будет выполнять функции записывающей головки), аннигилятор (уничтожитель) ЦМД (для стирания записанной информации) и, наконец, какой-либо датчик, отмечающий электрическим сигналом прохождение мимо него каждого ЦМД. Датчик будет выполнять функцию считывающей головки магнитофона. Магнитное поле, вектор индукции которого вращается в плоскости пластины с большой скоростью (100÷400 кГц), обеспечит циркуляцию информации в кольцевой дорожке. Когда это поле отключено, внешние постоянные магниты поддерживают все домены в устойчивом состоянии и прежнем порядке. Емкость одной дорожки может достигать сотни килобит; на пластине размером 10×20 мм можно разместить несколько десятков или сотен дорожек.

Микроскопические размеры ЦМД (до 0,5 мкм и менее), их уникальные свойства позволяют изготовить приборы, обладающие большой информационной емкостью при малых размерах и низком потреблении энергии, сохраняющие записанные сведения даже при отключении питания. Замечательно еще и то, что почти вся технология производства запоминающих устройств, основанных на ЦМД, практически готова — это технология полупроводниковых больших интегральных схем (БИС). Поэтому такие ЗУ развивались быстрыми темпами, и сейчас существуют серийные микросхемы с плотностью памяти 10^7 бит/см^2 и емкостью до 10^8 бит, занимающие объем менее литра, приемлемые по цене и по затратам энергии на управление.

ЗУ на ЦМД могут найти применение для устранения огромного разрыва во временах доступа к информации между оперативными ЗУ (на ферритовых сердечниках или полупроводниковых ИС) с высоким быстродействием (10^{-8}—10^{-6} с) и внешними ЗУ большой емкости (на магнитных лентах и дисках) с относительно низким быстродействием (10^{-3} с). Это позволит повысить эффективность работы современных ЭВМ, поскольку на сегодняшний день около 80 % машинного времени затрачивается на обмен информацией между оперативной и внешней памятью. Кроме того, ЗУ на ЦМД вне конкуренции при работе в экстремальных условиях, например, в бортовой электронной аппаратуре космических кораблей, в военной технике, где требуется повышенная надежность.

(Окончание см. на с. 18)

Гало и лед



Гало вокруг Луны с ложными лунами, верхней касательной дугой и световым крестом. (По акварели Л. Венкебаха.) О возникновении различных видов гало, радуги, комы, полярного сияния и других необычных природных оптических явлений можно прочитать, например, в книге М. Миннарта «Свет и цвет в природе».

Довольно часто, когда на небе появляются высокие перисто-слоистые облака, прозрачные и быстрые, а само небо становится молочно-белым, вокруг солнца появляется яркое светящееся кольцо или отдельные световые дуги и пятна. Это красивое явление носит название гало. Иногда оно наблюдается и около Луны.

Наиболее обычное из всех видов гало — это светящееся кольцо. Угловой радиус его всегда один и тот же и составляет около 22°. Внутренний край кольца очерчен достаточно четко и окрашен в красноватый цвет, а наружный — расплывчат и имеет синеватую окраску.

Объяснение этого красивого явления известно очень давно — свечение возникает в результате преломления света ледяными кристалликами, образующими перистые облака. Они, как известно, часто имеют форму правильной шестиугольной призмы. Такие призмы, парящие в воздухе, отклоняют проходящий через них свет как раз так, что возникает гало с угловым радиусом 22°. Кристаллики, конечно, ориентированы по-разному, но они довольно плоские, и поэтому лучи света заметно отклоняются лишь тогда, когда падают параллельно основанию призмы.*)

Оказывается, существует еще одна разновидность гало — светящееся кольцо с угловым радиусом 28°. За последние 300 лет его наблюдали всего лишь 7 раз. Недавно была высказана гипотеза, что такое гало возникает в результате преломления света на кристалликах льда, имеющих другую форму — форму октаэдра. Возможно, что эта новая, до сих пор неизвестная модификация льда и порождает гало с размерами как раз 28°.

Лед такой структуры получен экспериментально при температуре ниже −100 °С. Пока не вполне ясно, почему соответствующее гало бывает видно не при столь жестоком морозе. Однако хочется надеяться, что красивая гипотеза все же окажется истинной.

Я. С.

*) Гораздо реже, но все-таки можно наблюдать так называемое большое гало — кольцо с угловым радиусом примерно 46°. Оно имеет те же цвета, что и малое гало (с размером 22°), но яркость его существенно меньше. Появление его связано также с преломлением света ледяными кристалликами, но в этом случае лучи, падая на боковую грань призмы, после преломления выходят через ее основание.

Советуем купить

Отдел «Книга — почтой» магазина № 8 «Техника» (адрес магазина: 103031, Москва, ул. Петровка, д. 15) имеет в наличии и высылает наложенным платежом (без задатка) следующие книги:

Горшковский В. *Польские физические олимпиады:* Задачи и олимпиады / Пер. с польск. — М.: Мир, 1982. — 55 к.

Каганов М. И., Цукерник В. М. *Природа магнетизма.* — М.: Наука, 1982. — (Библиотечка «Квант»). — 30 к.

Китайгородский А. И. *Физика для всех: Фотоны и ядра.* — М.: Наука, 1982. — 40 к.

Шкловский И. С. *Звезды: их рождение, жизнь и смерть.* — М.: Наука, 1984. — 2 р.

Цыпкин А. Г. *Справочник по математике для средних учебных заведений.* — М.: Наука, 1983. — 1 р. 80 к.

Яворский Б. М., Селезнев Ю. А. *Справочное руководство по физике для поступающих в вузы и самообразования.* — М.: Наука, 1984. — 2 р.

Высокой геометрии начала ...

(К 300-летию первой публикации по дифференциальному исчислению)

Кандидат физико-математических наук
С. Г. ГИНДИКИН

Но это лишь начала некоей много более высокой Геометрии, которая распространяется на труднейшие и прекраснейшие задачи прикладной Математики, и едва ли кому-нибудь удастся заняться с той же легкостью такими вещами, не пользуясь нашим дифференциальным исчислением или ему подобным.
Лейбниц

В 1684 году, в выходившем в Лейпциге журнале "Acta Eruditorum" («Труды ученых» или, как говорят сейчас, «Ученые записки»), появилась семистраничная статья Готфрида Вильгельма Лейбница (1646—1716) «Новый метод максимумов и минимумов, а также касательных, для которого не служат препятствием ни дробные, ни иррациональные величины, и особый для этого род исчисления». Это была первая публикация по дифференциальному исчислению, хотя возникло оно лет за двадцать до этого, а первые шаги были сделаны на пятьдесят лет раньше — в самом начале XVII века. Однако статья Лейбница знаменовала важный этап в истории анализа бесконечно малых и 300-летие со дня ее появления — это естественный повод вспомнить о становлении этой великой математической теории.

Золотой век анализа

Анализ бесконечно малых был создан в течение XVII века в результате коллективных усилий замечательной плеяды математиков. Основными ориентирами были задача о касательной и задача о вычислении площадей криволинейных фигур (задача о квадратуре), которые впоследствии привели соответственно к дифференциальному и интегральному исчислениям. С проведением касательных, в свою очередь, связаны задачи об экстремумах (максимумах и минимумах), точках перегиба, выпуклости кривых. К квадратурам сводится вычисление разнообразных механических величин.

Становление анализа бесконечно малых было тесно переплетено с созданием новой механики. В начале века Галилей, исследуя свободное падение и движение тела, брошенного под углом к горизонту, одновременно решал первые аналитические задачи. Важнейший момент в создании анализа состоял в осознании взаимной обратности операций построения касательной и нахождения квад-

ратуры кривой, причем понято это было при помощи кинематических рассмотрений: нахождение скорости по пути сводится к построению касательной, а путь находится по скорости при помощи квадратуры.

К 60-м годам было решено большое число разнообразных задач, научились строить касательные к широким классам кривых, было сосчитано много площадей. В этой грандиозной работе принимали участие Кеплер, Кавальери, Декарт, Ферма, Паскаль, Гюйгенс и многие другие. Назрела необходимость систематизировать эти разрозненные результаты и превратить отдельные искусственные приемы в общие методы. Необходимо было превратить теорию бесконечно малых в исчисление — набор простых формальных, но широко действующих, рецептов. Нужно было превратить теорию из искусства в ремесло. В таком виде ее не только можно было вывести из узкого круга посвященных, но и крупным математикам это позволило бы пройти без усилий часть пути и сконцентрировать усилия на более глубоких вопросах.

Эту работу, опираясь на достижения их великих предшественников, выполнили Ньютон (1642—1727) и Лейбниц. «Бог сказал: да будет Ньютон! и наступил свет» — так сказано в популярном двустишии А. Попа. Ньютон создал свое исчисление в 1665—1667 годах во время своих «чумных каникул» в Вулсторпе, когда после окончания Кембриджского университета он оказался на своей ферме отрезанным из-за чумы от внешнего мира. Подробное сочинение Ньютона, почти законченное к 1670—1671 годам, не нашло издателя и надолго осталось неизвестным. Лишь разрозненные сведения о нем распространялись среди математиков. Одновременно наблюдался некоторый спад в математике. Как пишет Н. Бурбаки, к 70-м годам «активными остаются только Ньютон в Кембридже и Дж. Грегори, уединившийся в Абердине, к которым в скором времени со всем пылом вновь посвященного присоединяется Лейбниц».

Лейбниц и его путь в математику

Всю свою жизнь Лейбниц был нацелен на глобальные проблемы, на всеобъемлющие теории. Его путь в математику был не стандартен — он отдавал предпочтение методу в век, когда более ценили конкретные результаты. В жизни Лейбница было много планов. Некоторые поражают своей грандиозностью. Новые замыслы вытесняли старые, нередко увлекавшемуся автору не хватало реализма. Почти ни одной из задуманных книг он не дописал до конца, а большинство оставил в самом начале (лишь несколько книг по философии постигла лучшая участь). Но как трудно сохранить реализм, когда замыслы далеко обгоняют век!

Уже с 13—14 лет Лейбниц мечтает о перестройке логики, о создании алфавита человеческих мыслей, в котором можно было бы записывать все мыслительные процессы. Постепенно зреет главная идея его жизни: создание «универсальной характеристики», «универсального языка». «Универсальная математика является, так сказать, логикой воображения», она должна заняться всем, «что в области воображения поддается точным определениям». Язык должен быть защищен от записи неправильных мыслей: «химеры, которые не понимает даже тот, кто их создает, не смогут быть записаны его знаками». Он грезит о машине, которая будет доказывать теоремы, хочет превратить мышление в исчисление, арифметизировать его так, чтобы можно было заменять рассуждения вычислениями и решать споры при помощи математических выкладок. Трижды приступал Лейбниц к реализации своего грандиозного, сильно опередившего время замысла, но остановился, пройдя лишь первые шаги. Только в XX веке многое из задуманного Лейбницем оказалось явью в рамках математической логики и современной вычислительной техники. Стало ясно, что его замыслы были не утопичны, а прозорливы.

Лейбница интересуют разнообразные применения математики и он верит в безграничные ее возможности. Он готовится стать юристом и в 18 лет пытается строить юриспруденцию как математическую теорию с аксиомами и теоремами, думает о применении вероятностных соображений в судопроизводстве. В 20 лет он отказывается от кафедры в Нюрнбергском университете, его не привлекает спокойная академическая карьера. Планы Лейбница более честолюбивы:

> «Я давно в душе лелеял другое» и далее «Я считал недостойным молодого человека сидеть, точно пришпиленный к месту; дух мой горел желанием стяжать большую научную славу и посмотреть на свет».

Лейбниц принимает приглашение герцога Иоганна Филиппа и переезжает в Майнц. Он хочет воспользоваться ситуацией и, пусть в рамках довольно скромного государства, создать совершенный свод законов. Постепенно его планы становятся все более широкими и одновременно ... менее реалистическими. Он задумывает перестройку всей юридической науки, начинает три большие монографии. У него не мало интересных идей, но скоро приходит очередь совершенно другого замысла.

Живший в это время в Майнце известный дипломат Бойнебург увлекает Лейбница грандиозными планами изменить европейскую политику. Их замыслам тесно в провинциальном Майнце. Они берутся за предложение курфюрста Бранденбургского найти мотивировку для избрания на польский престол немецкого князя. Лейбниц сочиняет блестящий меморандум, который, впрочем, не помог выиграть дело: правильная практическая дипломатия оказалась эффективнее политического памфлета. Следующий прожект касался организации союза немецких государств против Франции. Он содержал немало остроумных ходов, но реализовать его не удалось. Наконец, третий грандиозный замысел: вовлечь Францию в войну с Турцией с тем, чтобы ослабить ее влияние в Европе. Для реализации этого замысла, в 1672 году Лейбниц едет в Париж. Единственным результатом было то, что Лейбниц по существу лишился поддержки курфюрста, который не очень был заинтересован в советнике, который через его голову пытался перестраивать европейскую политику.

Оставшись не у дел, Лейбниц переключается на математику. Первоначально в планах Лейбница математике предназначалась вспомогательная роль. В 1666 году он издал в Лейпциге «Диссертацию о комбинаторном искусстве», в которой он сообщает, что его не интересует открытие новых арифметических истин, математика должна помочь ему разработать «логику открытия». И в Майнце он находит время для «математических досугов». В 1670 году он работает над конструкцией арифметической машины, интересуется машиной Паскаля. Лейбниц привез в Париж в 1672 г. свои математические результаты. Осенью 1672 года они были темой обсуждения с Гюйгенсом, который тогда работал в Париже. Речь шла о суммировании числового ряда $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$ при помощи подбора такой последовательности b_1, b_2, b_3, ..., что $a_n=b_n-b_{n+1}$. Тогда $a_1+\ldots+a_n=b_1-b_{n+1}$. Лейбниц рассматривает ряд примеров, когда его правило работает; под правило удачно подошел пример, предложенный Гюйгенсом

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots\left(b_n=\frac{1}{n}\right).$$

Они оба не знали, однако, что этот прием не был нов, да и речь шла об очень частном вопросе. Лейбниц, тем не менее, был тогда высокого мнения о своих достижениях. Позднее он более трезво оценивал ситуацию:

«Когда я приехал в 1672 году в Париж, я был математиком-самоучкой, но опыт мой был не велик, мне не хватало терпения пройти долгую цепь доказательств... Я хотел плавать самостоятельно, без учителя... В этом высокомерном математическом невежестве я уделял внимание только истории и праву, видел в их изучении свою цель. Однако математика была для меня более приятным развлечением.»

«Самый учащийся из смертных»

В 1673 г. Лейбниц посетил Лондон в составе майнцской дипломатической миссии. Контакты с английскими математиками подействовали на него отрезвляюще. Он узнал, что его основные результаты не новы, а современная математика далеко впереди. У Лейбница оставался единственный путь войти в современную математику — начать все с начала. 27 лет — не самый подходящий возраст для старта в науку молодых, но Лейбница это не смущает. Он имел все основания позднее назвать себя «самым учащимся из смертных» (письмо Я. Бернулли, 1703 г.).

С осени 1673 года начинаются «годы математического ученичества» Лейбница, умело направляемые Гюйгенсом. Гюйгенс угадал в самоуверенном «переростке» подлинный дар.

«...Гюйгенс, который, как я предполагаю, считал меня более способным, чем я был на самом деле, дал мне экземпляр только что изданного «Маятника». Для меня это было началом или поводом для более глубоких математических занятий.»

Итак, все началось с великой книги «Маятниковые часы». Затем последовало изучение работ Сент-Винцента, Декарта, Слюза, Валлиса и, прежде всего, Паскаля.

Лейбницу было бы не плохо почитать и более классические тексты, но он торопится и пробирается «к геометрии поистину с черного хода». Появляются результаты, удивившие Гюйгенса, например, ряд для вычисления числа π:

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\ldots$$

Потом оказалось, что его знал Грегори. Гюйгенс рассчитывал, что при помощи ряда можно получить квадратуру круга (а Грегори, напротив, рассчитывал таким способом доказать трансцендентность π). Лейбниц занимается не только анализом. Он пытается найти формулу для решения общего алгебраического уравнения (именно общего, частные проблемы его мало интересуют), анализирует формулу Кардано в комплексной области (удивляет Гюйгенса соотношением $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}=\sqrt{6}$), работает над циркулем, который позволил бы находить корни любого уравнения, подобно тому как обычный циркуль позволяет находить корни квадратного.

Все же главные результаты связаны с бесконечно малыми. Лейбниц писал уже в 1673 году: «я заполнил несколько сот страниц», но еще «не считал этот труд достойным быть изданным. Ибо мне наскучило заниматься мелочами, когда передо мной открылся Океан». Много теорем было получено в первый год «ученичества», но большинство из них можно было найти у Грегори или у учителя Ньютона Барроу (1630—1677). Однако общие приемы позволяли получать все проще и единообразнее. Путь Лейбница был выбран: он строит исчисление бесконечно малых.

Характер его таланта, его предыдущий научный опыт как нельзя лучше отвечали этой цели. Он четко продумывает вопрос о классе функций, которые должны рассматривать в анализе (само слово «функция» впервые появляется у Лейбница в 1673 г.). Он решительно отвергает идею ограничиться алгебраическими функциями («геометрическими кривыми» по Декарту) и считает, что необходимо рассматривать и трансцендентные функции (термин Лейбница, Декарт говорил о «механических кривых»).

Лейбниц, как никто до него, понимал важность удачной символики, причем не только в математике. Исчисление бесконечно малых дало ему прекрасный повод для разработки символики, которая не только упрощает пользование исчислением, но и по существу необходима для овладения им. В 1678 году Лейбниц писал своему коллеге Чиргаузу:

«Следует заботиться о том, чтобы знаки были удобны для открытий. Это достигается в наибольшей мере тогда, когда знаки коротко выражают и как бы отображают глубочайшую природу вещи, и при этом удивительным образом сокращается работа мышления».

Лейбниц искал возможность ввести удобную символику всюду. Стоит упомянуть, что к нему восходит метод решения систем линейных уравнений при помощи определителей, в связи с чем он писал Лопиталю во Францию (1693 г.):

«Часть секрета анализа состоит в искусстве хорошо употреблять применяемые знаки, и по этому малому образцу Вы видите, сударь, что Виет и Декарт еще не познали все его тайны».

Следует подчеркнуть, что в исчислении Ньютона не было развитой символики. Ньютон сам писал, что «не дал своего метода в форме символов и не придерживался какого-либо их определенного вида». Вероятно, символика явилась решающей причиной, по которой мы пользуемся сегодня анализом в варианте Лейбница.

Уже в 1674 году Лейбниц уверен, что «все учение о суммах и квадратурах может быть сведено к анализу — вещь, на которую никто до сих пор не надеялся». К концу 1675 года в первом приближении исчисление построено. У Лейбница возникает повод убедиться в его эффективности при решении задачи Дебона, которой занимался Декарт, но не смог довести до конца:

«Еще в прошлом году я поставил перед собой вопрос, который можно отнести к труднейшим во всей геометрии, поскольку распространенные до сих пор методы здесь почти ничего не дают. Сегодня я нашел его решение и я приведу его анализ» (11 ноября 1675 г.)

Речь идет о нахождении кривой с постоянной подкасательной — отрезок между проекцией точки A на ось x и точкой пересечения касательной в точке A с осью x (рис. 1). К середине 1676 года дифференциальное и интегральное исчисления сложились окончательно. Он поражается, что «благодаря этому исчислению все предстает перед очами и в уме с восхитительной краткостью и ясностью».

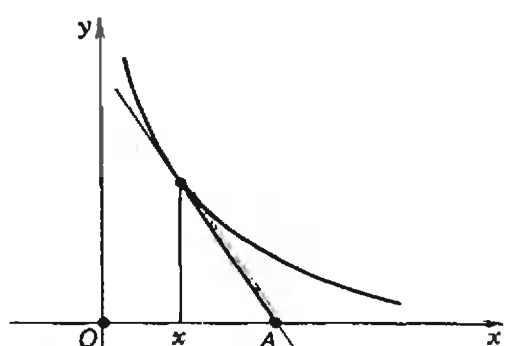


Рис. 1

Лейбниц, как и Ньютон, стремился создать мощный метод, не заботясь на этой стадии о достаточно строгом обосновании исчисления. Еще на стадии ученичества Лейбницу казалось, что Грегори слишком увлекается «доказательством на античный лад». Для Лейбница конкретные результаты, в первую очередь, рассматривались как возможная иллюстрацию его метода. Видимо здесь сказалось, что он никогда не умел легко делать выкладки и всегда завидовал вычислителям «из железа или меди». Позднее (1696 год, письмо Лопиталю) он связывал это с тем, что одновременно занимался многими разными вещами:

«Моему уму, занятому другими предметами, не удается сосредоточиться в необходимой мере, из-за этого я ежеминутно спотыкаюсь, а когда я напрягаю внимание, у меня появляется неприятное ощущение какого-то жара». В 1699 году вычисления «становятся приятнее, когда их делишь с кем-нибудь, а я не в состоянии долго заниматься вычислениями, если мне не помогают».

В 1675 году в Париже вместе с Лейбницем работал его соотечественник и коллега Чирнгауз (1651—1708), который занимался больше всего алгебраическими уравнениями, но интересовался также и квадратурами. Умелый вычислитель, он удачно дополнял Лейбница, но тогда все же не смог оценить пользу исчисления.

Ньютон и Лейбниц

Лейбниц, разумеется, слышал, что Ньютон владеет какими-то мощными методами и решает обсудить с ним свой новый метод. Через посредничество Ольденбурга (секретаря Королевского общества) в 1676 году происходит обмен письмами. Лейбниц перечисляет задачи, которые он умеет решать, просит сообщить о методах Ньютона, обещает рассказать о своем методе. Еще ранее Лейбниц писал Ольденбургу, что создание метода — «единственная вещь», которой он придает значение. Результаты Лейбница не удивили Ньютона. Он сразу заметил, что задача Дебоиа сводится к квадратуре гиперболы (логарифмам), а по поводу ряда для π заметил, что потребовалось бы 1000 лет, чтобы сосчитать 20 десятичных знаков π. Очень скупо говорит Ньютон о методе. Ясно лишь, что центр тяжести в его рассмотрениях на степенных рядах. Ньютон утверждает, что он в состоянии решить при их помощи любое дифференциальное уравнение. Основная часть информации закодирована в двух анаграммах. Ньютон расшифровал их много позднее. Это был старинный способ сохранить приоритет. Быть может, значение, которое Ньютон приписывал степенным рядам, помешало Лейбницу осознать, что у Ньютона имеется исчисление.

Лейбниц не согласен, что ряды решают все проблемы. Ему видится иная картина. Надо пытаться сводить решение дифференциальных уравнений к известным квадратурам. Важно разобраться, хватает ли элементарных функций и квадратур гиперболы и круга (логарифмической и тригонометрических функций). Грегори приводил веские аргументы в пользу того, что для вычисления длин дуг эллипса или гиперболы (будущие эллиптические интегралы) этих квадратур мало. Тогда надо «установить какие-то другие высшие основные фигуры» (в другом месте «высшие трансцендентности в геометрии»), которых достаточно для решения дифференциальных уравнений. Ньютона и эта постановка не застает врасплох: он сообщает при каких α, β интеграл $\int x^{\alpha}(1+x)^{\beta}dx$ сводится к известным квадратурам. Переписку прервал Ньютон; кроме того в 1677 году умер Ольденбург, через которого она велась.

Вновь при дворе

Да и жизнь Лейбница решительно изменилась. От его парижского периода остались лишь черновики и наброски статей. У него зреет план подготовки всеобъемлющего труда «Математика бесконечного», но жизненные перемены решительно отвлекли его от математики.

Нам не дано знать, опять-ли взыграло у Лейбница политическое честолюбие или он не нашел возможности обеспечить себе жизнь занятиями наукой (возможно протестанство помешало ему получить место в Парижской академии наук). Так или иначе с конца 1676 года он на службе у герцога Иоганна Фридриха в Ганновере. Он едет в Ганновер кружным путем, посещает Лондон, где видится со многими математиками, но не встречается с Ньютоном, а в Голландии навещает Спинозу.

Итак, Лейбниц смог получить место лишь у второстепенного государя, да и то, поначалу, он лишь герцогский библиотекарь. Не самое завидное место для 30-летнего ученого и политика, еще не отказавшегося от честолюбивых замыслов. Но Лейбниц полон энтузиазма и мечтает о лучшей библиотеке в мире, пока реально отпускаемые средства не охладили его. Он занимается и юридической деятельностью, но его предпочитают загружать повседневными делами, к которым у него нет вкуса, а не к глобальным юридическим проблемам. Очень ограниченно допускают Лейбница к дипломатической деятельности. Так, ему поручается подготовить текст, мотивирующий право герцога участвовать во франко-германских мирных переговорах. Иоганн Фридрих был католическим монархом в протестантском государстве, и Лейбниц хотел воспользоваться этим обстоятельством, чтобы осуществить еще одну свою заветную идею — объединить католическую и протестантскую религии.

В 1679 году на престоле новый герцог, Эрнст Август, при котором дела стали идти хуже. Но Лейбниц полон проектов, спектр которых необычайно широк: усовершенствование кладки печей, производства гвоздей, молотков, усовершенствование колес экипажей, удочек, рулей, кораблей, литейного производства, пожарного дела, реорганизация архивов, составление «Свода законов Эрнста-Августа» и т. д. Почти ни один проект не нашел поддержки.

В каждом проекте Лейбница была остроумная находка, но ему часто не хватало реализма. Успех наступал тогда, когда за доводку идеи брался талантливый практик. Так было с паровой машиной: «...Лейбниц, рассыпая вокруг себя, как всегда, гениальные идеи без заботы о том, припишут ли заслугу открытия этих идей ему или другим, — Лейбниц, как мы знаем теперь из переписки Папена (изданной Герландом), подсказал ему при этом основную идею: применение цилиндра и поршня» (Энгельс) *).

Постоянная борьба за влияние при дворе надолго отвлекла Лейбница от математики. Новое обращение Лейбница к математике стимулировалось двумя обстоятельствами. С 1682 года при его поддержке стали выходить «Ученые записки» в Лейпциге и Лейбниц предлагает публиковать там свои результаты. В 1683—1684 годах в журнале публикуются статьи Чирнгауза о квадратурах, в которых Лейбниц обнаруживает следы своих недавних бесед с автором, без необходимых ссылок. Когда-то Лейбниц безуспешно пытался убедить Чирнгауза в эффективности исчисления, теперь Чирнгауз напечатал сам некоторые результаты в этом направлении. Очень вероятно, что Чирнгауз не помнил, что первоисточником его утверждений были высказывания Лейбница. Так бывает, что непонятные мысли прячутся глубоко, а через некоторое время возникают как свои собственные.

В мае 1684 года Лейбниц напечатал статью с осторожной критикой Чирнгауза (без приоритетных претензий и без указания полной фамилии своего коллеги), а в октябре выходит его знаменитая статья, юбилей которой явился поводом для наших обсуждений.

«Новый метод...» Лейбница

Попытаемся, опираясь на наши сегодняшние сведения о дифференциальном исчислении, прочитать текст Лейбница и отнесемся сочувственно к его современникам, которым статья осталась непонятной. Лишь математику масштаба Я. Бернулли (см. ниже) было по плечу домыслить то, что еще не приобрело форму, приспособленную для передачи другим.

«Допустим, что даны ось AX и ряд кривых VV, WW, YY, ZZ и их перпендикулярные к оси ординаты VX, WX, YX, ZX, которые мы назовем соответственно v, w, y, z; отсекаемый на оси отрезок AX назовем x.

Пусть VB, WC, YD, ZE будут касательные, пересекающие ось соответственно в точках B, C, D, E (рис. 2). Назовем произвольно взятую прямую dx, а другой отрезок, относящийся к dx так, как v (или w, или y, или z) относится к XB (или XC, или XD, или XE) назовем dv (или dw, или dy, или dz) или же раз-

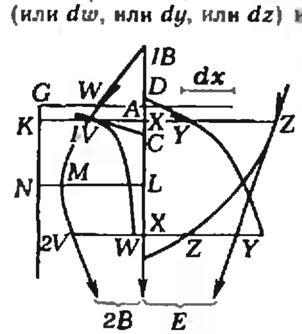


Рис. 2.

*) Маркс К., Энгельс Ф. Соч. 2-е изд., т. 20. с. 431.

ностью v (или w, или y, или z). Если установить это, то правила исчисления будут следующими.

Если a представляет собой постоянную величину, то da будет равно 0 и dax равно adx. Если y равно v (или же каждая ордината кривой YY равна соответствующей ординате кривой VV), то dy равно dv. Далее, *Сложение* и *Вычитание:* если $z-y+w+x$ равно v, то $d\ \overline{z-y+w+x}$ или dv равно $dz-dy+dw+dx$. *Умножение:* $d\overline{xv}$ рав. $xdv+vdx$ или, если положить y равно xv, то dy равно $xdv+vdx$. Можно по произволу пользоваться либо формулой с xv, либо же, для краткости, одной буквой, как, например, y. Заметим, что в этом исчислении с x и dx обращаются так же, как и с y и dy или с какой-нибудь иной неопределенной буквой и ее дифференциалом. Заметим также, что обратный переход от дифференциального уравнения получается лишь при некоторых условиях; но об этом в другом месте. Далее, *Деление:* $d\left(\frac{v}{y}\right)$ или же $\left(\text{если положить } z \text{ равно } \frac{v}{y}\right)$

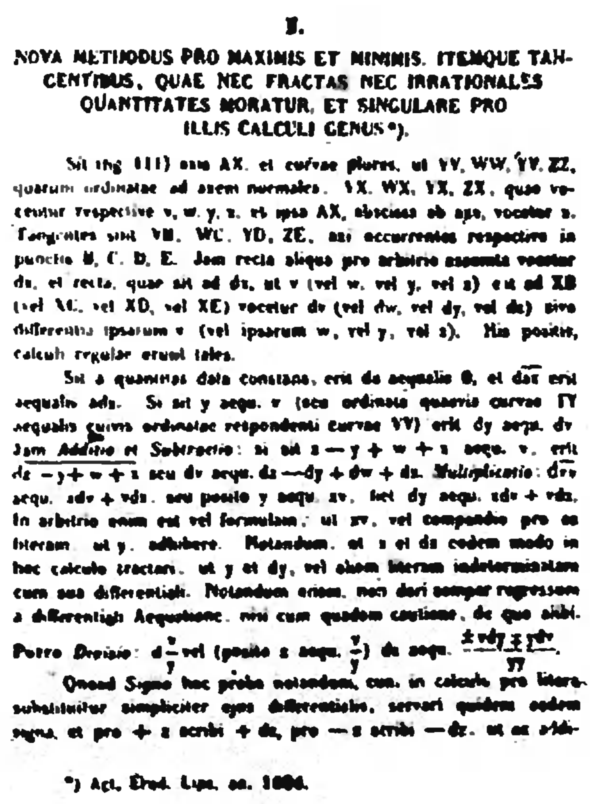
dz равно $\frac{\pm vdy \mp ydv}{yy}$.»

Здесь черта вверху заменяет скобки. Одновременно рассматривается несколько функций v, w, y, z от независимой переменной x, хотя термин «функция» еще не вводится. Дифференциал dy определяется из условия $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{l}$, где y — ордината, l — длина подкасательной, dx — произвольно выбранный отрезок. Подчеркивается его «отчуждение» от исходной функции и произвол (даже на рисунке он вынесен наружу). Казалось бы, его можно было положить равным 1 и тогда мы получили бы производную, но Лейбница это не устраивает. Он подчеркивает, что можно произвольно менять выбор независимой переменной и ее дифференциала, в одной фазе формулируя несомненно выстраданное им утверждение об «инвариантности дифференциала», то есть, в сущности, правила дифференцирования сложной функции. У Ньютона независимая переменная была фиксирована (время). В дальнейших примерах Лейбниц демонстрирует, как полезно бывает пользоваться произволом в выборе x и dx.

Дальнейший текст статьи содержит довольно туманные рассуждения о выборе знаков dy. Затем рассматривается задача о нахождении максимумов и минимумов, обращение dy в бесконечность связывается с перпендикулярностью касательной к оси AX. Без достаточных мотивировок рассматривается ddy — «разности разностей» — и исследуются задачи о точках перегиба, выпуклости и вогнутости. Дифференцируется функция x^{α} для любого рационального α и этому придается большое значение (см. заглавие статьи), поскольку задачи, содержащие радикалы, до работы Лейбница предварительно сводили к целым показателям. На примере циклоиды рассматривается задача о проведении касательных к трансцендентным кривым. Исследуются разнообразные задачи на касательные и экстремумы, в частности, выводится закон преломления и решается задача Дебона (см. выше). Очень оптимистична оценка предлагаемого исчисления: «То, что человек, сведущий в этом исчислении, может получить прямо в трех строках, другие учёнейшие мужи принуждены были искать следуя сложными, обходными путями».

Математика и «завоевание умов» государей

После публикации «Нового метода...» жизнь Лейбница в Ганновере продолжается без заметных изменений. По существу в это время Лейбниц не зани-



I.

NOVA METHODUS PRO MAXIMIS ET MINIMIS, ITEMQUE TANGENTIBUS, QUAE NEC FRACTAS NEC IRRATIONALES QUANTITATES MORATUR, ET SINGULARE PRO ILLIS CALCULI GENUS*).

Sit (fig. 111) axis AX, et curvae plures, ut VV, WW, YY, ZZ, quarum ordinatae ad axem normales, VX, WX, YX, ZX, quae vocentur respective v, w, y, z, et ipsa AX, abscissa ab axe, vocetur x. Tangentes sint VB, WC, YD, ZE, axi occurrentes respective in punctis B, C, D, E. Jam recta aliqua pro arbitrio assumta vocetur dx, et recta, quae sit ad dx, ut v (vel w, vel y, vel z) est ad XB (vel XC, vel XD, vel XE) vocetur dv (vel dw, vel dy, vel dz) sive differentia ipsarum v (vel ipsarum w, vel y, vel z). His positis, calculi regulae erunt tales.

Sit a quantitas data constans, erit da aequalis 0, et $d\overline{ax}$ erit aequalis adx. Si sit y aequ. v (seu ordinata quaevis curvae YY aequalis cuivis ordinatae respondenti curvae VV) erit dy aequ. dv. Jam *Additio et Subtractio*: si sit z − y + w + x aequ. v, erit $d\overline{z-y+w+x}$ seu dv aequ. dz − dy + dw + dx. *Multiplicatio*: $d\overline{xv}$ aequ. xdv + vdx, seu posito y aequ. xv, fiet dy aequ. xdv + vdx. In arbitrio enim est vel formulam, ut xv, vel compendio pro ea literam, ut y, adhibere. Notandum, et x et dx eodem modo in hoc calculo tractari, ut y et dy, vel aliam literam indeterminatam cum sua differentiali. Notandum etiam, non dari semper regressum a differentiali Aequatione, nisi cum quadam cautione, de quo alibi.

Porro *Divisio*: $d\frac{v}{y}$ vel (posito z aequ. $\frac{v}{y}$) dz aequ. $\frac{\pm vdy \mp ydv}{yy}$.

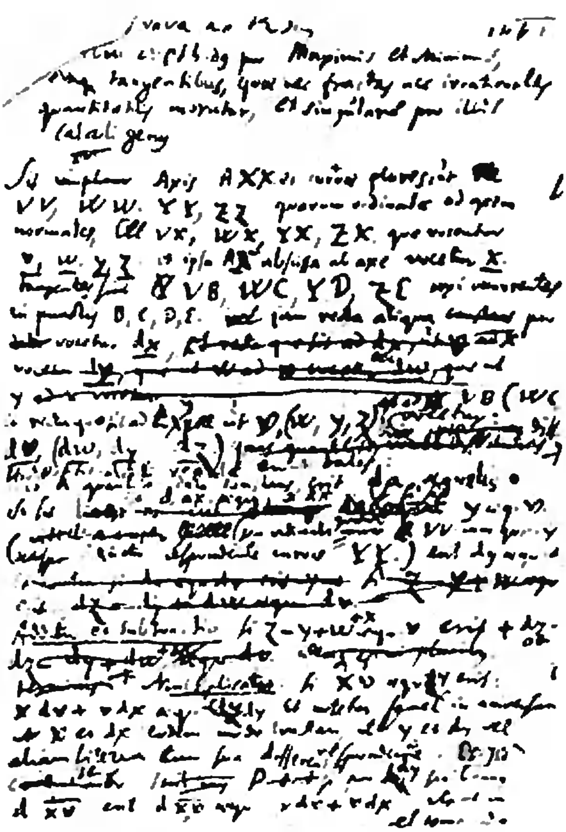
Quoad Signa hoc probe notandum, cum in calculo pro litera substituitur simpliciter ejus differentialis, servari quidem eadem signa, et pro + z scribi + dz, pro − z scribi − dz, ut ex addi-

*) Act. Erud. Lips. an. 1684.

Первая страница статьи Лейбница «Новый метод...».

мается анализом. Он лишь печатает немногое из своих математических «кладовых». В частности, в 1686 году вышла статья «О глубоко скрытой геометрии и анализе неделимых, а также бесконечных». В ней впервые появляется в печати интеграл (он еще называется суммой, но обозначается через $\int$; термин «интеграл» ввел И. Бернулли). Здесь четко формулируется взаимная обратность операций дифференцирования и интегрирования, подчеркивается необходимость рассмотрения трансцендентных функций в анализе. В статье приводятся краткие исторические замечания. Ньютон называется «глубочайшего дарования геометром», отмечается, что публикация его методов способствовала бы «немаловажному приращению науки». На этом фактически закончился второй период математической жизни Лейбница.

Дела Лейбница при дворе складываются все хуже. В 1687 году он отправляется в трехлетнюю поездку для работы в архивах Германии и Италии над историей дома Вельфов, к которому относится герцог Эрнст Август. С 1690 года Лейбниц снова в Ганновере. Он рассчитывает за два-три года закончить «Историю Вельфов», но его замысел все расширяется и эта оценка оказалась, как всегда, оптимистична. Книга тяжелым грузом висела над ним до конца его дней.



Рукопись статьи Лейбница «Новый метод...».

По приезде в Ганновер Лейбница ждало письмо Якоба Бернулли (1654—1705), отправленное еще в 1687 году. Я. Бернулли прочел статьи Лейбница и проникся духом нового исчисления. Ожидая ответа Лейбница, Бернулли начал активно работать в анализе, вовлекая в занятия своего младшего брата Иоганна (1667—1748). Лейбниц нашел понимание, которого ждал много лет. О лучших учениках не приходилось и мечтать. У Лейбница возникла своя научная школа (то, чего был лишен Ньютон). В контактах с братьями Бернулли Лейбниц начал систематически развивать анализ. Они печатали статьи в «Acta Eruditorum», обменивались письмами, обсуждали задачи. Позднее к триумвирату присоединился маркиз Лопиталь (1661—1704), ученик И. Бернулли, впоследствии автор первого курса дифференциального и интегрального исчисления. Между тем политические замыслы Лейбница по-прежнему не приносят успеха, хотя он и становится тайным советником. Новый герцог (с 1698 года) Георг Людвиг настойчиво выражает желание наконец увидеть «книгу-невидимку» — давно ожидаемую «Историю Вельфов», Лейбница по существу отстраняют ото всех дел и стараются ограничить его внешние контакты.

О систематических занятиях наукой не могло быть и речи. В 1695 году он пишет:

«Нет слов, чтобы описать, насколько я не сосредоточен. Ищу в архивах разные вещи и собираю ненапечатанные рукописи, с помощью которых надеюсь пролить свет на историю Брауншвейгского дома. Я получаю и отправляю немалое число писем. У меня столько нового в математике, столько мыслей в философии, столько других литературных заметок, которым я не могу дать погибнуть, что я часто не знаю, за что раньше приняться... Уже свыше двадцати лет назад французы и англичане видели мою счетную машину*)... Теперь же с помощью собранных мною рабочих готова машина, позволяющая перемножать до двенадцати разрядов... А прежде всего я хотел бы закончить свою «Динамику», в которой, я полагаю, наконец нашел истинные законы материальной природы... Мои друзья, которые знают о по-

*) Счетная машина Лейбница показана на с. 10.

строенной мною высшей геометрии, настаивают на издании моей «Науки о бесконечном», содержащей основы моего нового анализа...»

Последние годы жизни Лейбница были омрачены полемикой с Ньютоном о приоритете. Постепенно спор перерос в обвинение Лейбница в плагиате. Намекали на то, что возможно он познакомился с рукописями Ньютона в Лондоне. Сегодня независимость открытия Лейбница представляется доказанной. В Лондоне не было достаточно подробного текста, в первый приезд Лейбниц не был готов воспринять теорию Ньютона, не было никого, кто понимал исчисление настолько, чтобы передать его Лейбницу. Ко второму же визиту в Лондон Лейбниц уже владел своим исчислением. Вначале полемика проходила без участия Ньютона и Лейбница. Удивительно, что Ньютон, который всегда уходил от приоритетных споров, на этот раз энергично включился в полемику. Вероятно, Лейбниц очень задел его, ни разу не признав в нем творца нового исчисления (теперь уже появились публикации). В Англии организовали подлинную травлю Лейбница.

Все осложнилось еще из-за того, что в 1714 году герцог становится королем Англии Георгом I. Лейбниц рассчитывает переехать в Лондон, стать королевским историографом, но ему в оскорбительной форме отказывают даже в поездке на коронацию (заставляя завершать «Историю»). Сыграло свою роль и то, что король не хотел иметь в своей свите поверженного противника знаменитого Ньютона. Умер Лейбниц в 1716 году. Надпись на могильной плите весьма лаконична: «прах Лейбница».

Возможно, научная карьера Лейбница сложилась бы иначе, если бы он смог найти себе просвещенного и сильного покровителя. На склоне лет, в 1711 году, Лейбниц познакомился с Петром I, на свадьбе царевича Алексея. Петр принял Лейбница на русскую службу тайным советником юстиции, обсуждая с ним организацию Академии наук в Петербурге. Но планам Лейбница, связанным с Петром I, как и многим другим его проектам, не суждено было сбыться. Лейбниц писал Петру I:

«Хотя мне часто приходилось действовать на политическом и юридическом поприщах, и знатные князья иногда в этих вопросах пользуются моими советами, я все-таки предпочитал науки и искусства, так как они постоянно содействуют славе господней и благосостоянию всего рода человеческого... науки и ремесла составляют настоящее сокровище человеческого рода, ибо посредством их искусство превозмогает природу и цивилизованные народы отличаются от варварских. Поэтому я с малолетства любил науки, занимался ими и имел счастье... сделать разные и очень важные открытия, восхваленные в печати беспристрастными и знаменитыми людьми. Я не находил только могущественного государя, который достаточно интересовался бы этим».

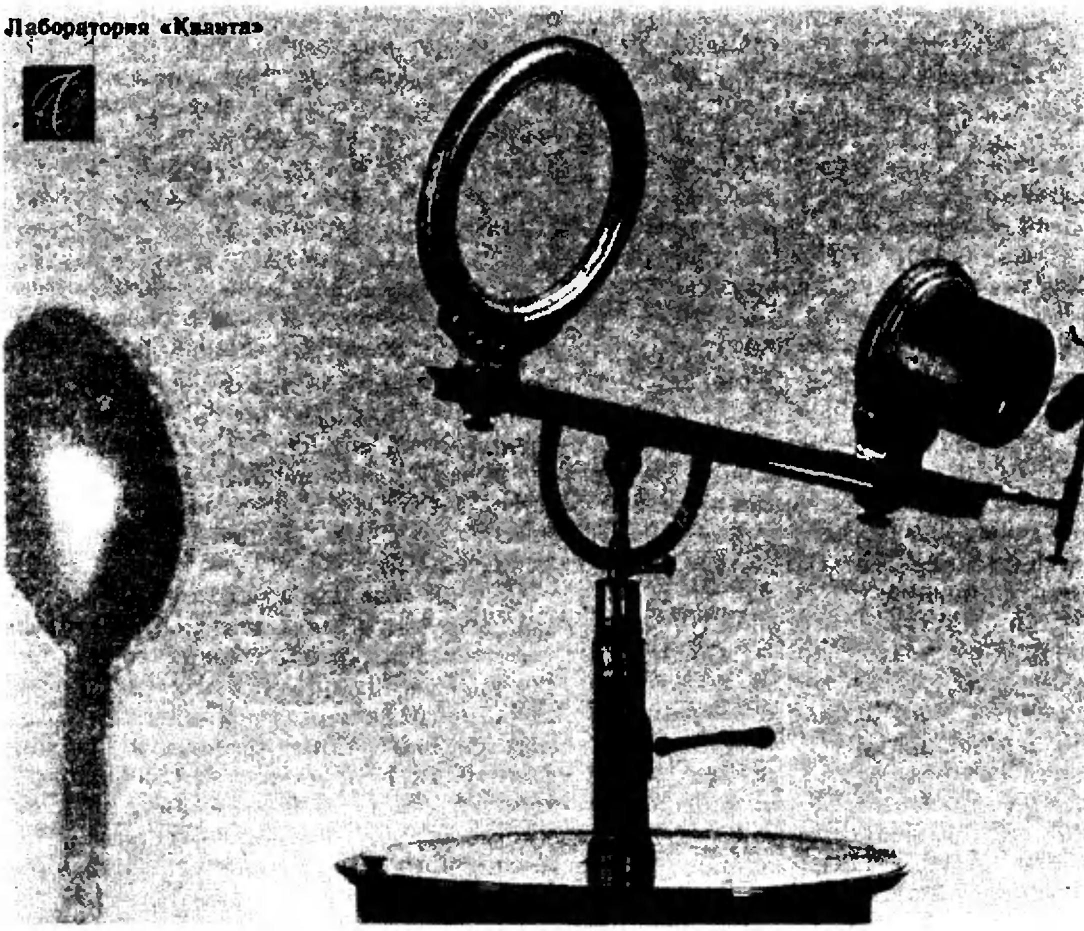
По-видимому с годами оценки Лейбница сместились: он долго отдавал приоритет политике перед наукой, но жизнь жестоко научила его, как неблагодарно положение ученого во дворцах. И последующие поколения помнят не столько неудачи Лейбница на политическом поприще, сколько его научные достижения, сыгравшие решающую роль в дальнейшем развитии науки. К числу таких работ, несомненно, принадлежит работа 1684 года о дифференциальном исчислении.

Магнитная память ЭВМ

(Начало см. на с. 2)

Заканчивая рассказ о магнитной памяти вычислительных машин, отметим, что идеальное ЗУ пока еще не создано, мечта фантастов о магическом кристалле, который все помнит и все знает, остается мечтой, но достаточно близкой к реализации. С точки зрения физиков, дело упирается в подходящий материал, с точки зрения инженеров — требуется удобная технология и доступная цена.

Авторы понимают, что в короткой статье все охватить невозможно. Поэтому они хотят еще раз напомнить читателям, что явление магнетизма, известное с древности, и сегодня служит самой передовой научной мысли и сулит блестящие перспективы. Его теоретические разработки далеки от завершения, а поиски новых магнитных материалов только развернулись. Магнитофизики и материаловеды ждут новых энтузиастов.



Несколько опытов с объективом

Кандидат физико-математических наук
А. А. ЛАПИДЕС

Наверное, каждому из вас приходилось иметь дело с биноклем или проекционным аппаратом, фото- или киноаппаратом, микроскопом или телескопом. Основной элемент всех этих оптических приборов — объектив, позволяющий получать действительные изображения различных объектов.

Современные объективы очень сложны по своему устройству, но все они, как правило, представляют собой совокупность специально подобранных линз. Так что линзу можно считать прародительницей сегодняшних объективов.

В конце XVII века нидерландский натуралист А. Левенгук, отшлифовав кусочек стекла, изготовил линзу, которая давала увеличение в 300 раз. С ее помощью Левенгуку впервые удалось исследовать мир инфузорий и бактерий, наблюдать движение крови в капиллярах и многое другое, что невозможно было увидеть невооруженным глазом.

Законы геометрической оптики объясняют способность линзы создавать изображение — световые лучи, испущенные какой-нибудь точкой объекта, преломляются в линзе так, что опять собираются в точку. Однако так происходит далеко не всегда. Любая одиночная линза обладает целым рядом недостатков.

Во-первых, лучи, испущенные светящейся точкой и идущие под малыми углами к оптической оси линзы, собираются в одной точке (B), а лучи, идущие под большими углами к оси,— в другой (B') (рис. 1). Поэтому, если в плоскости, проходящей через изображение B, установить экран, вокруг точки B мы увидим светлое пятно. Его часто называют кружком рассеяния.

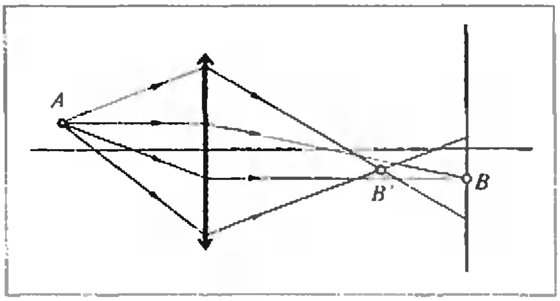


Рис. 1.

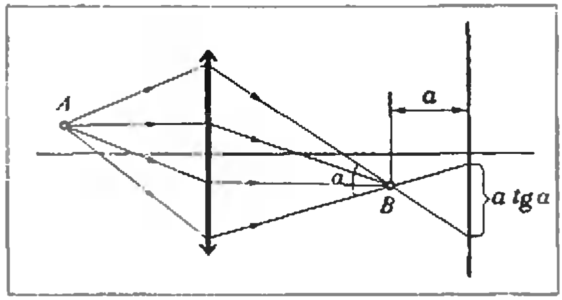


Рис. 3.

Во-вторых, из-за явления дисперсии линза преломляет свет разных длин волн (разных цветов) по-разному. А это значит, что лучи разных цветов собираются после преломления в разных точках и вместо одной яркой точки на экране наблюдается пятно, причем окрашенное.

Эти и другие погрешности линз приводят к тому, что изображения протяженных объектов оказываются искаженными, не вполне отчетливыми, порой окрашенными.

Характер искажений может изменяться в зависимости от различных причин. Но, во всяком случае, искажения тем больше, чем больше угол, образуемый с оптической осью лучами, идущими от объекта. Давайте убедимся в этом экспериментально.

Опыт 1. Возьмите очки, расположите их на расстоянии 20—30 см от глаз и посмотрите на какой-нибудь предмет, например на страницу текста. Перемещая текст и очки относительно лица, добейтесь такого положения, при котором вы видите текст увеличенным. Обратите внимание на то, что изображения букв вблизи краев искажены; в центре же искажения невелики (рис. 2). (Подумайте, почему те, кто носит очки, не замечают подобных искажений?)

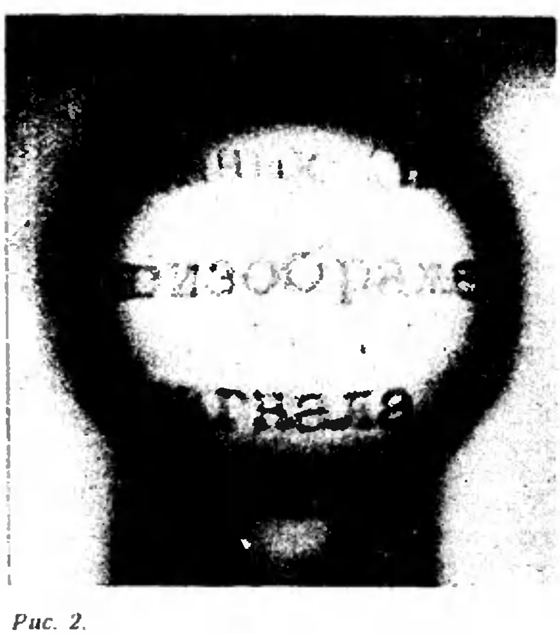


Рис. 2.

Велики или малы искажения линзы? Как всегда в физике этот вопрос сам по себе бессмыслен. Необходимо иметь некоторый «эталон», с которым можно сравнивать величину искажений. В данном случае таким «эталоном» может быть размер наиболее мелкого характерного участка изображения. Если он много больше кружка рассеяния, то искажения линзы следует признать незначительными — наблюдатель их просто не заметит. Если же изображение таково, что размеры его мелких элементов сравнимы с диаметром кружка рассеяния, то они будут казаться как бы смазанными, нечеткими.

Можно ли исправить положение и уменьшить искажения изображения?

Оказывается, это можно сделать введением на пути лучей дополнительной линзы, искажения которой противоположны по знаку искажениям данной линзы. Так, для линзы, изображенной на рисунке 1, роль «корректирующей» линзы будет играть рассеивающая линза, которая сильнее преломляет центральные лучи и слабее — периферийные (в этом легко убедиться, сделав соответствующий чертеж). В современных оптических приборах количество используемых с этой целью линз может достигать 8—10 и даже больше. Получаемую при этом систему линз и называют объективом. Он обладает основным свойством одиночной линзы — способностью создавать изображение, но дает существенно меньшие искажения.

Ход лучей в объективе представлен на рисунке 3. Сравнивая рисунки 1 и 3, мы видим, что объектив собирает практически все лучи в одну точку — размер кружка рассеяния объектива обычно составляет величину порядка 20 мкм. Однако, если экран смещен на величину a от точки B, на нем образуется круг размера $a \operatorname{tg} \alpha$, где α — угол, соответствующий крайним лучам, проходящим сквозь линзу. Зависимость размера этого круга от угла, а значит и от диаметра объектива, используется фотографами для получения фотографий с большой глубиной резкости.

Наводка аппарата на резкость заключается в смещении объектива относительно пленки (которая в данном случае играет роль экрана на рисунке 3). Объектив устанавливают в такое положение, что изображение фотографируемого объекта оказывается расположенным точно в плоскости пленки. При этом, очевидно, изображения предметов, находящихся дальше от фотографируемого объекта, оказываются перед пленкой, а предметов, находящихся перед ним,— за пленкой. Отдельные малые элементы этих предметов создадут на пленке освещенные кружки, диаметр которых пропорционален величине диафрагмы объектива. Поскольку качество фотографического изображения определяется еще и зернистостью пленки, то изображения предметов не будут ухудшены по сравнению со случаем точной наводки на резкость, если размер кружка рассеяния не превосходит радиуса зерна пленки. А этого можно добиться соответствующим подбором диаметра объектива. Вот почему при фотографировании сцен, содержащих далеко расположенные друг от друга (вдоль оптической оси) предметы, или, как говорят, имеющих большую глубину, необходимо уменьшать диафрагму объектива. Подтвердим сказанное экспериментом.

Опыт 2. Возьмите фотоаппарат, лучше с зеркальным видоискателем (например, «Зенит»). Нарисуйте на белом листе несколько горизонтальных и вертикальных линий, закрепите лист на стене и осветите его настольной лампой.

С расстояния около 1 м наведите фотоаппарат на резкость при полностью открытой диафрагме объектива, отодвиньте его от первоначального положения на 20—30 см так, чтобы изображение стало нерезким, и задиафрагмируйте объектив. Глубина резкости при этом увеличится, и изображение опять станет четким.

Снова откройте диафрагму до максимальной величины. Приложите к объективу экран из картона в виде щели длиной примерно 3 см и шириной 2—3 мм. Если вы ориентируете щель горизонтально, изображение горизонтальных линий станет резким, в то время как вертикальные линии останутся размытыми; если же щель вертикальна — резко будут видны вертикальные линии. Фотография, воспроизведенная на рисунке 4, иллюстрирует этот факт (слева изображен неискаженный объект, а справа — его вид через горизонтальную щель).

Объяснить этот опыт можно так. Введение щели изменяет форму пятна рассеяния — вместо круглого оно становится прямоугольным, причем длинная сторона прямоугольника ориентиро-

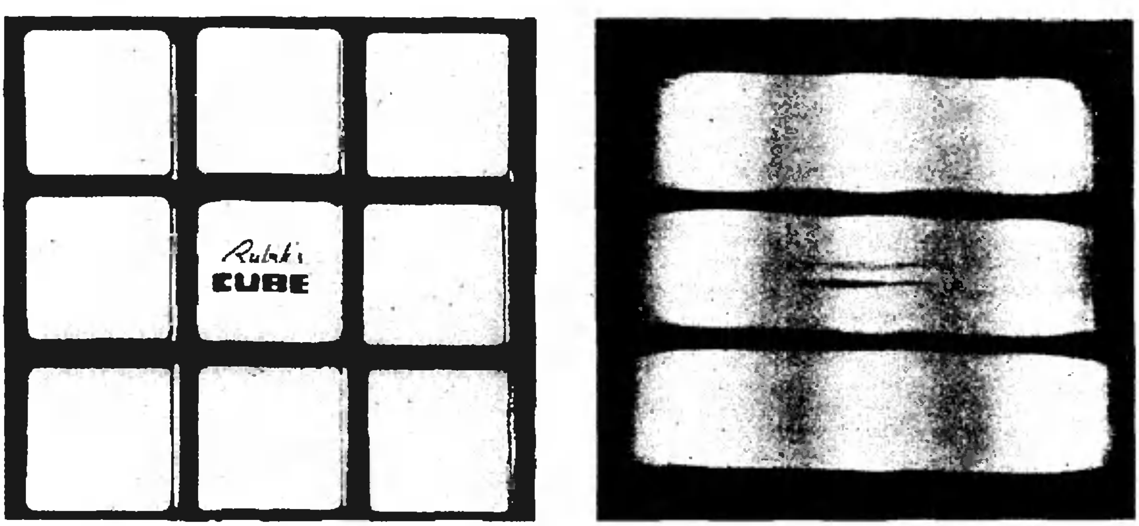


Рис. 4.

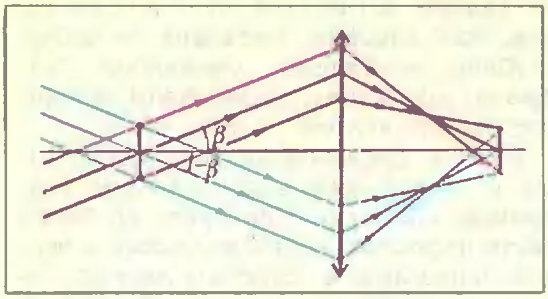


Рис. 5.

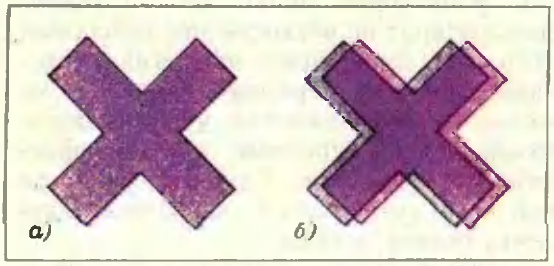


Рис. 6.

вана параллельно щели. Для линий, параллельных щели, глубина резкости оказывается большой (величину диафрагмы для них определяет ширина щели), а для линий, перпендикулярных щели,— малой (величину диафрагмы для них определяет длина щели).

Как мы уже говорили, если источник посылает свет во все стороны, размер кружка рассеяния на экране определяется диаметром диафрагмы объектива. Если же источник испускает узкий пучок, изменения диафрагмы роли не играют и диаметр кружка целиком определяется самим пучком.

Проведем опыт, цель которого — исследовать зависимость резкости изображения от расходимости освещающего пучка. Нам понадобятся объектив от фотоаппарата, два карманных фонарика и два цветных стеклышка, например красное и синее. Обращаться с объективом следует осторожно, чтобы не повредить поверхностей линз.

Опыт 3. Возьмите лист черной бумаги и бритвой прорежьте в нем тонкий крест. Установите этот лист перед объективом, а за объективом закрепите другой лист бумаги — экран. Осветите крест карманным фонариком. Перемещая оба листа и объектив друг относительно друга вдоль оптической оси, добейтесь такого положения, когда изображение креста на экране будет наиболее четким. Убедитесь, что изображение будет оставаться достаточно четким при перемещении экрана в некоторой области вдоль оптической оси.

Теперь направьте на крест свет от двух фонариков, совместив с одним из них красное стеклышко, а с другим — синее (рис. 5). Красные лучи, падающие под углом β, образуют красное изображение креста, а синие лучи, идущие под углом — β,— синее изображение. Эти изображения накладываются друг на друга только при одном положении экрана (рис. 6, *а*). Смещение экрана вызывает смещение изображений в поперечном относительно оптической оси направлении — появляется окрашенный контур изображения на экране (рис. 6, *б*). Но при этом как красное, так и синее изображения остаются четкими. Уберите цветные стеклышки — изображение креста станет бесцветным и менее четким.

Объяснение опыта состоит в следующем. Как красное, так и синее изображения образованы узкими пучками. Поэтому диаметр кружка рассеяния на экране, создаваемого светом каждой точки, мал. За счет наклона пучка к оси центр кружка, а значит и каждое одноцветное изображение, смещается в сторону, но остается достаточно резким. Если убрать цветные стеклышки, то белый свет от двух фонариков как бы образует общий пучок с углом раскрытия 2β, который значительно превосходит углы раскрытия красного и синего пучков. Поэтому резко возрастает радиус круга на экране — изображение становится менее четким.

Мы рассказали лишь о нескольких опытах с объективом, которые интересно и полезно провести. Разумеется, их число можно увеличить по своему усмотрению.

Поправка

В «Кванте» № 9 в заметке «Гармонические колебания. Сложение колебаний» в середине правой колонки на с. 23, там, где обсуждается первый крайний случай, вместо равенства

$$\cos(\varphi_{02}-\varphi_{01})=\cos(\varphi_2-\varphi_1)=0$$

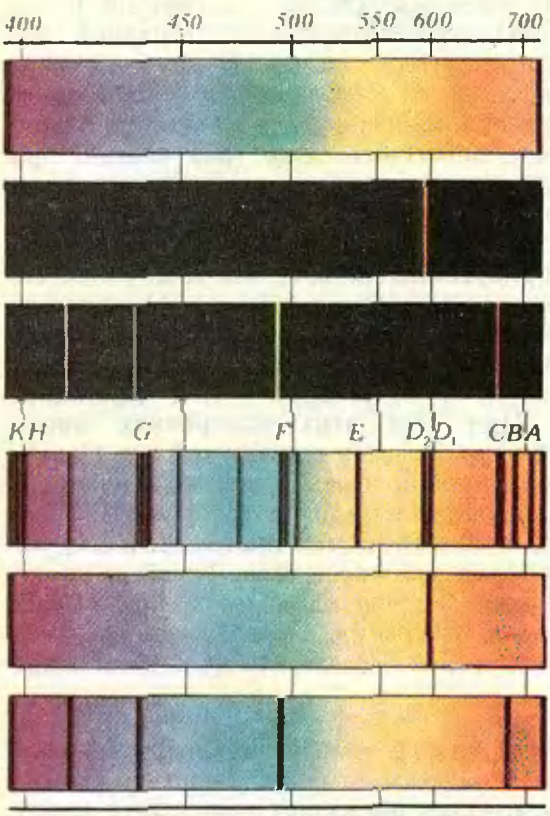
должно быть

$$\cos(\varphi_{02}-\varphi_{01})=\cos(\varphi_2-\varphi_1)=1.$$

Спектральный анализ

В этом году исполняется 125 лет спектральному анализу, одному из важнейших физических методов исследования вещества.

В 1802 году английский ученый У. Х. Волластон (1766—1828) впервые заметил в солнечном спектре узкие темные линии, но не придал этому наблюдению особого значения. Гораздо более обширные и достоверные результаты получил в 1814—1815 годах немецкий оптик Й. Фраунгофер (1787—1826). Он показал, что спектр Солнца содержит множество темных линий (позже их стали называть фраунгоферовыми), а спектр пламени, куда была введена поваренная соль,— две яркие желтые линии. При этом он заметил также, что положения двух этих цветных линий точно совпадают с положениями двух темных линий (D-линий, по Фраунгоферу) солнечного



Спектры испускания и поглощения Солнца, натрия и водорода. Цифры на рисунке — это длины волн (в нанометрах), соответствующие различным участкам видимой области спектра. Буквами обозначены наиболее интенсивные фраунгоферовы линии.

спектра. В последующие несколько десятилетий к исследованию спектров обращались многие ученые, но сколь-нибудь существенного прогресса достигнуто не было.

Такова вкратце предыстория спектрального анализа. Его же действительная история начинается с октября 1859 года, когда в трудах Берлинской Академии наук появилась небольшая — всего две страницы — статья «О фраунгоферовых линиях». Статья была написана уже знаменитым в то время профессором физики Гейдельбергского университета Г. Кирхгофом (1824—1887), и речь в ней шла о спектральных исследованиях, которые он провел вместе с другим — не менее знаменитым — гейдельбергским профессором-химиком Р. Бунзеном (1811—1899).

Важнейший опыт состоял в следующем: перед разложением в спектр (с помощью призмы) солнечный луч пропускали через пламя, в которое была введена поваренная соль. «В тех случаях, когда солнечный свет был достаточно ослаблен,— писал Кирхгоф,— на месте темных D-линий появлялись две светлые линии; если же интенсивность солнечного света переступала известную границу, то обе темные D-линии обнаруживались с гораздо большей отчетливостью, чем при отсутствии пламени с поваренной солью». Кирхгоф сделал вывод: «Можно считать, что светлые линии в спектре пламени, совпадающие с D-линиями, всегда возникают вследствие присутствия в нем натрия; поэтому темные D-линии в солнечном спектре заставляют думать, что в атмосфере Солнца имеется натрий».

В наши дни даже трудно представить, сколь сильное впечатление произвел на современников этот вывод — впервые земная наука получила возможность определять химический состав далеких небесных тел. Сам же метод спектрального анализа, который с первых опытов представлялся гейдельбергским профессорам чуть ли не самоочевидным, был надежно проверен и со всей определенностью установлен в последующих работах Кирхгофа и Бунзена.

Вот его основной принцип: каждому химическому элементу свойственно специфическое расположение спектральных линий, которые выглядят яркими и цветными, когда атомы этого элемента излучают свет, и темными — когда они свет поглощают.

Огромная плодотворность метода спектрального анализа выявилась незамедлительно. Уже в 1860 году Кирхгоф и Бунзен, зарегистрировав неизвестный спектр, открыли новый элемент — цезий. В 1861 году они же открыли рубидий. Вскоре другими учеными аналогичным образом были открыты таллий и индий. Со временем открытие Кирхгофа и Бунзена превратилось в стандартный, универсальный и обладающий чрезвычайно высокой чувствительностью лабораторный метод качественного и количественного анализа вещества. Так, с его помощью можно обнаружить примеси, содержание которых составляет 10^{-6} % от основного материала.

Что касается природы самих спектров и причин удивительных закономерностей в расположении спектральных линий, то ответы на эти вопросы удалось получить только в первые десятилетия нашего века, когда возникла квантовая механика, теория, само создание которой было неразрывно связано с проблемой «расшифровки» спектров.

Б. Е. Явелов

Физика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Как «открыть» второй закон Ньютона?» предназначена восьмиклассникам, «Газ превращается в жидкость» — девятиклассникам, «Уравнение волны» — десятиклассникам.
Материалы подготовил И. К. Белкин

Как «открыть» второй закон Ньютона?

Ньютон в своем знаменитом труде «Математические начала натуральной философии» определяет силу следующими словами:

«Приложенная сила есть действие, производимое над телом, чтобы изменить его состояние покоя или равномерного прямолинейного движения».

Другими словами, сила есть причина ускорения. Второй же закон движения Ньютон формулирует так:

«Изменение движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует».

Слова «изменение движения», несомненно, означают изменение скорости движения, так как именно скорость — главная количественная характеристика движения, а направление вектора скорости и есть направление движения. Таким образом, второй закон Ньютона сводится к утверждению, что ускорение (которое непосредственно связано с изменением скорости) тела пропорционально приложенной к нему силе и направлено так же, как сила.

Но слово «пропорционально» предполагает, что сила может быть выражена численно. Между тем приведенное выше словесное определение силы не позволяет сопоставить силе какое-то число. Остается поэтому неясным, как именно Ньютон «узнал», что ускорение и сила связаны между собой так, как это утверждается в его законе. Но ясно, что второй закон Ньютона — это такой закон, который может быть получен только из опыта. Какого опыта? К сожалению, Ньютон не счел нужным сообщить об этом в своей книге. Но нетрудно себе представить, каким должен быть такой опыт.

Прежде всего для опыта нужно воспользоваться такой силой, которая не зависит от того, к какому телу она приложена. Этому условию удовлетворяет, например, сила упругости растянутой (сжатой) пружины. Она определяется *только* удлинением пружины, и при данном удлинении пружина действует на любое прикрепленное к ней тело с одинаковой силой.

Если для опыта использовать силу упругости пружины, то связь между силой и ускорением можно установить двумя способами.

Способ первый. Сила упругости определенным образом растянутой (сжатой) пружины принимается равной единице (эталон силы). К пружине прикрепляется какое-нибудь тело и измеряется ускорение тела при его движении под действием силы (разумеется, при движении тела удлинение пружины изменяться не должно!). Затем к этому же телу, то есть к телу той же массы, прикрепляются 2, 3, 4 и т. д. такие же и так же растянутые (сжатые) пружины и снова измеряются ускорения, сообщаемые телу силами, равными теперь двум, трем, четырем и т. д. единицам.

При всех этих измерениях масса m тела остается одной и той же. Поэтому должна быть какая-то величина, связанная с силой и ускорением, тоже одинаковая во всех опытах. Ее и следует приравнять массе тела. Такой опыт показал бы, что одинаковой при любых действующих силах величиной было бы отношение F/a, так что можно написать

$$m = \frac{F}{a}, \text{ или } F = ma.$$

Этот способ требует предварительного выбора эталона силы. Тогда измерение ускорения позволяет определить массу тела, выразить ее определенным числом.

Способ второй. Берется пружина, деформированная произвольным образом, так что возникает какая-то сила упругости, пока неизвестная. К пружине прикрепляется тело известной массы. А известна она потому, что существует эталон массы, с которым можно сравнить массу любого тела, например так, как это описано в § 23 «Физики 8». Измеряется ускорение тела, движущегося под действием силы упругости пружины. Затем к той же и так же деформированной пружине (так что сила осталась прежней) прикрепляются тела с другими, но тоже известными, массами и снова измеряются их ускорения.

Раз сила, приложенная к разным телам, одна и та же, то при измерениях должна получиться некоторая величина, связанная с ускорением, одинаковая для всех тел. Ее и нужно приравнять приложенной ко всем телам силе («Физика 8», § 25). Описанные опыты показывают, что такой одинаковой для всех тел величиной оказывается произведение ma. Значит,

$$F=ma.$$

Оба способа дают, как мы видим, одинаковый результат. Они эквивалентны друг другу, потому что все равно действовать ли разными силами на одно и то же тело или одной и той же силой на разные тела. В учебнике «Физика 8» второй закон Ньютона «открыт» с помощью второго способа, возможно, потому, что его проще выполнить. Дело в том, что первый способ предполагает, что выбран определенный эталон силы — какая-то и как-то деформированная пружина. Второй способ предполагает, что выбран определенный эталон массы. В физике и в технике пошли именно по этому пути — существует международный эталон массы в виде платино-иридиевого цилиндра. Эталон массы проще хранить и воспроизводить, чем эталон силы.

Таким образом, основной закон динамики — второй закон Ньютона — есть чисто опытный закон, впрочем, как и всякий другой закон природы. В то же время формула $F=ma$ второго закона может служить и определением силы как физической величины: силой называется физическая величина, равная произведению массы тела, к которому она приложена, на его ускорение.

Это не единственный случай, когда одна и та же формула выражает определенный закон природы и в то же время служит определением некоторой физической величины.

Газ превращается в жидкость

(Из истории физики)

Долгое время единственным известным науке газом был атмосферный воздух, который к тому же считался чем-то вроде элемента, составной части всего существующего. И лишь во второй половине XVIII века усилиями многих химиков было установлено, что существуют и другие газы, что сам воздух — это смесь различных по своей природе и свойствам газов. Впрочем слово «газ» тогда не было в употреблении. То, что мы теперь называем газом, тогда называлось «воздухом». Водород — это горючий воздух, кислород — огненный воздух, азот — удушливый воздух, аммиак — щелочной воздух и т. д.

Но в конце XVIII века химики, и прежде всего французский химик Антуан Лавуазье, сумели разобраться в новом своем газовом «хозяйстве». Лавуазье дал всем 20 известным в то время газам имена. Он же предложил слово «газ» в качестве общего наименования всего этого класса веществ. Лавуазье впервые ввел и представление об агрегатных состояниях вещества.

Как превратить газ в жидкость? О возможности превращения газа в жидкость Лавуазье высказал такую идею: «... Если бы мы могли поместить Землю в некую весьма холодную область, например в атмосферу Юпитера или Сатурна, то... воздух, или по крайней мере некоторые его компоненты, перестал бы быть невидимым и превратился в жидкость. Превращение такого рода открыло бы возможность получения новых жидкостей, о которых мы до сих пор не имеем никакого понятия».

Это было догадкой выдающегося химика, догадкой пророческой. Но нашлась и другая возможность.

Вместо охлаждения — сжатие. В 1792 году нидерландский физик Ван Марум пытался выяснить, справедлив ли закон Бойля — Мариотта («Физика 9», с. 45) для аммиака (ведь и Бойль и Мариотт открыли этот закон, исследуя воздух!). Для этого Ван Марум сжимал аммиак в цилиндре и измерял его давление, которое при этом, естественно, росло. Но неожиданно при давлении около 7 атмосфер (1 атм $\approx 10^5$ Па) давление газа

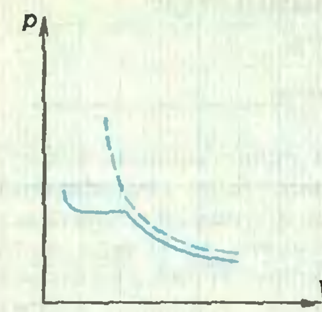


Рис. 1.

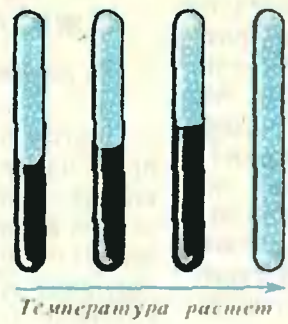


Рис. 2.

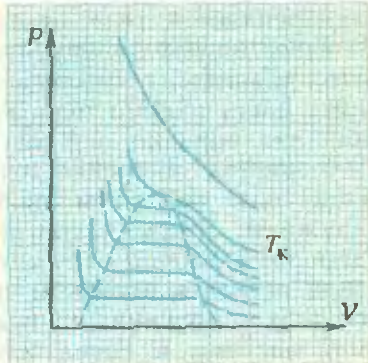


Рис. 3.

перестало расти, несмотря на то, что объем его продолжал уменьшаться. При этом в сосуде появился *жидкий* аммиак.

На рисунке 1 сплошной линией показана полученная Ван Марумом зависимость давления газа от объема. Штриховой линией показана зависимость p от V, соответствующая закону Бойля — Мариотта; так вел бы себя воздух. Различие между воздухом и аммиаком разительное. Уже при сравнительно малом давлении в сосуде с аммиаком появляется жидкость и, конечно, насыщенный пар над ней.

Следовательно, насыщенный пар можно получить не только испаряя жидкость в закрытом сосуде («Физика 9», с. 79), но и сжимая газ, конечно, тоже в закрытом сосуде. Опыт Ван Марума показывал как будто бы, что для сжижения газа охлаждение не обязательно, его можно заменить сжатием, повышением давления.

Изобретатель сирены нагревает жидкость. В 1822 году французский физик Каньяр де Латур, известный как изобретатель сирены и автор многочисленных исследований колебаний струны, опубликовал статью, в которой описал опыты с нагреванием жидкостей (спирта, эфира, воды) сначала в запаянном стальном сосуде (сделанном из пушечного ствола), а затем в запаянных толстостенных стеклянных трубках (в стальном сосуде ничего не видно!). Он заметил, что с повышением температуры уровень жидкости в сосуде сначала слегка понижается (жидкость испаряется), а затем повышается (жидкость при нагревании расширяется), при некоторой же температуре граница между жидкостью и паром над ней внезапно исчезает (рис. 2). Отсюда Каньяр де Латур сделал вывод, что при температуре выше той, при которой изчезает граница, вещество в жидком состоянии не может существовать — возможно только газообразное состояние.

Чтобы снова получить жидкость, вещество нужно охладить. Каньяр де Латур и в самом деле для многих веществ наблюдал восстановление границы жидкость — пар при охлаждении трубки. Только для воды он не смог увидеть исчезновение границы — еще до этого лопались трубки.

За дело берется Фарадей. Одним из немногих, кто понял работу Каньяра де Латура как указание на то, что для сжижения газа требуется не только сжатие его, но и охлаждение, был английский физик Майкл Фарадей. Уже в 1823 году он сумел превратить в жидкость хлор. Через 20 лет, в 1844 году, он снова вернулся к работе по сжижению газов. Действуя и охлаждением и повышением давления, Фарадей сумел сжижить сероводород, двуокись углерода, серный ангидрид. Правда некоторые газы, такие, как кислород, азот, водород, упорно не поддавались сжижению. Некоторые исследователи, считавшие, что для сжижения газа достаточно одного давления, подвергали эти газы действию все более высоких давлений. Но тщетно — даже казавшееся в то время чудовищным давление в 3000 атмосфер не принесло успеха. За этими газами прочно укрепилась «репутация» несжижаемых, и их стали называть «постоянными» газами.

Охлаждение обязательно. Однако все больше ученых склонялись к мысли, что для каждого вещества существует такая температура, выше которой оно может находиться только в газообразном состоянии. Так думал Фарадей. К такой же мысли в 1860 году пришел Д. И. Менделеев, который назвал эту температуру абсолютной точкой кипения.

Окончательную ясность в этот вопрос внес английский физик Томас Эндрюс. В 1869 году он опубликовал результаты своих многолетних опытов. Как и Ван Марум, Эндрюс изучал поведение газа при уменьшении его объема и увеличении давления. Но если Ван Марум провел опыт только при комнатной температуре, то Эндрюс проводил опыты при самых разных температурах.

На рисунке 3 сплошными линиями показаны кривые, полученные Эндрюсом. Он тоже наблюдал появление жидкости при давлениях, которым соответствуют горизонтальные участки кривых. Но с увеличением температуры эти давления постепенно повышались, а ширина горизонтальных участков становилась все меньше, пока при некоторой температуре, обозначенной на рисунке 3 через $T_к$, горизонтальный участок на кривой не исчезал совсем. При этом исчезала и граница между жидкостью и паром — то, что наблюдал еще Каньяр де Латур.

Выше этой температуры, названной Эндрюсом *критической температурой*, вещество жидким быть не может. Жидкость и насыщенный пар над ней могут наблюдаться лишь в той области давлений и объемов, которая на рисунке 3 ограничена штриховой линией. Если же температура газа выше $T_к$, то для его сжижения обязательно охлаждение.

После работы Эндрюса стало ясно, что и «постоянные» газы вовсе не постоянны. Просто их критические температуры много ниже комнатных. С этого времени борьба за сжижение «постоянных» газов превратилась в борьбу за получение низких температур. Потребовалось еще 40 лет, прежде чем удалось сжижить все без исключения газы. Так в 1877 году были сжижены азот ($T_к = 126{,}3$ К) и кислород ($T_к = 154{,}8$ К). В 1898 году был получен жидкий водород ($T_к = 33{,}2$ К). Еще через 10 лет, в 1908 году, был превращен в жидкость последний газ — гелий ($T_к = 5{,}2$ К). Этим было положено начало развитию одной из важнейших областей физической науки — физики низких температур.

Таким образом, для веществ, обычно известных нам как газообразные, комнатная температура выше их критической температуры. Поэтому они и газообразны. Наоборот, для веществ, которые мы привыкли считать жидкими, комнатная температура ниже их критических температур. У воды, например, критическая температура равна 647,3 К (374,3 °С). Поэтому на Земле вода жидкая. На Венере, планете горячей (температура на поверхности Венеры около 480 °С), рек и морей, похожих на земные, быть не может, даже если бы там и существовало вещество, молекулы которого имели бы состав H_2O.

Уравнение волны

Волна, как известно, это процесс распространения колебаний в пространстве. Чтобы волна в среде могла распространяться, точки среды должны быть связаны между собой силами, способными вызвать колебания, то есть силами упругости. На рисунке 1 показан ряд таких связанных между собой точек. Если одна из точек, например точка O, начинает колебаться, то ее колебания передаются в направлении r.

Пусть точка O колеблется вдоль оси X по закону

$$x = x_m \sin \omega t. \qquad (1)$$

Здесь время t отсчитывается от момента, когда точка O находилась в положении равновесия. Ее колебания передаются другим точкам не мгновенно, а с некоторой скоростью v. Это значит, что за единицу времени колебание доходит до точки в ряду, расположенной от точки O на расстоянии, численно равном v. Расстояние же, на которое колебание распространяется за время, равное одному периоду T колебаний, называется *длиной волны* λ («Физика 10», с. 81). Отсюда следует, что

$$\lambda = vT, \text{ или, так как } T = \frac{1}{\nu}, \quad v = \lambda\nu.$$

Любая точка в нашем ряду (см. рис. 1), как только до нее дойдет волна, начнет колебаться с той же частотой, что и точка O, то есть будет повторять эти колебания. Но повторять с некоторым запозданием — ведь до точки, находящейся от O на расстоянии r, колебание дойдет через промежуток времени, равный r/v. Поэтому для координаты x точки на расстоянии r мы должны написать

$$x = x_m \sin \omega \left(t - \frac{r}{v}\right). \qquad (2)$$

Уравнение (2) называется *уравнением волны*. Оно позволяет найти смещение x от положения равновесия любой точки (находящейся на любом расстоянии r) в любой момент времени. Для данного момента времени оно дает как бы фотографию положений всех точек ряда относительно оси X. Уравнение волны показывает, что все точки действительно совершают одинаковые колебания (все колеблются вдоль оси X, и у всех одинаковые амплитуда и частота колебаний). Неодинаковы только фазы колебаний — разность фаз колебаний двух точек, расстояние между которыми равно Δr, составляет $\omega\Delta r/v$.

Иногда уравнение волны удобнее представить несколько иначе. Перепишем уравнение (2) в виде

$$x=x_m \sin\left(\omega t-\frac{\omega r}{v}\right).$$

Подставим во второй член в скобках вместо скорости волны v равную ей величину $\lambda\nu$, а вместо ω напишем $2\pi\nu$. Тогда получим

$$x=x_m \sin\left(\omega t-\frac{2\pi r}{\lambda}\right). \qquad (3)$$

Из этого выражения видно, что координата x любой точки на расстоянии r от источника волны зависит от величины r/λ, то есть от числа длин волн, укладывающихся на расстоянии r. Если, например, $r=\lambda$, то отставание по фазе будет равно 2π, а это значит, что фаза колебаний этой точки будет такая же, как и точки O. Точно так же, если $r=2\lambda$, 3λ и т. д., то сдвиг фазы будет равен 4π, 6π и т. д., то есть и в этом случае фазы будут одинаковыми. Таким образом, точки волны, находящиеся друг от друга на расстоянии, равном длине волны, двум длинам волн, вообще целому числу длин волн, колеблются в одинаковых фазах.

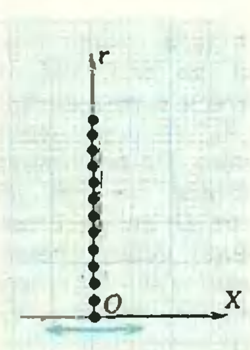


Рис. 1.

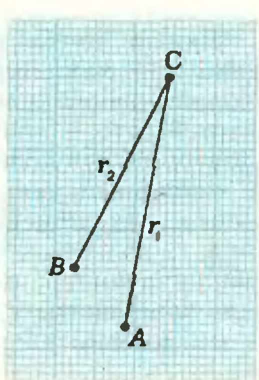


Рис. 2.

Уравнение волны (3) позволяет легко получить условия максимумов и минимумов при *интерференции волн* (о которых говорится в «Физике 10» на с. 94). Напомним, что вопрос об интерференции возникает тогда, когда в некоторую точку пространства приходят две волны, каждая из которых приносит в эту точку колебания. Поэтому точка, где «встретились» две волны, участвует в двух колебаниях. Результат же сложения двух колебаний зависит от разности фаз складывающихся колебаний.

Допустим, что в некоторую точку C пришли две волны, источники которых — точки A и B — отстоят от C на расстояния r_1 и r_2 (рис. 2). Тогда в точке C складываются два колебания, происходящие вдоль одной оси:

$$x_1=x_{m1} \sin\left(\omega t-\frac{2\pi r_1}{\lambda}\right),$$

$$x_2=x_{m2} \sin\left(\omega t-\frac{2\pi r_2}{\lambda}\right).$$

Разность фаз этих колебаний равна

$$\varphi_1-\varphi_2=\frac{2\pi}{\lambda}(r_1-r_2).$$

Поэтому условие усиления (максимумов) имеет вид

$$\varphi_1-\varphi_2=\frac{2\pi}{\lambda}(r_1-r_2)=2\pi k,$$

где $k=0, 1, 2, \ldots$,

откуда

$$r_1-r_2=k\lambda=2k\frac{\lambda}{2}$$

— колебания будут усилены (то есть амплитуда сложного колебания будет равна сумме амплитуд складываемых колебаний), если разность хода r_1-r_2 волн до места «встречи» равна *четному* числу полуволн. Соответственно условие минимумов —

$$\varphi_1-\varphi_2=\frac{2\pi}{\lambda}(r_1-r_2)=(2k+1)\pi,$$

или

$$r_1-r_2=(2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

— колебания будут ослаблены (результирующая амплитуда будет равна разности амплитуд колебаний в двух волнах), если разность хода волн равна *нечетному* числу полуволн.

Математика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Об одном способе решения некоторых уравнений» предназначена восьмиклассникам, «Три решения одной задачи» — девятиклассникам. Это деление в какой-то мере условно, так как каждая из этих заметок может быть полезной не только учащимся указанных классов.

Об одном способе решения некоторых уравнений

Рассмотрим следующую задачу:

1. Решите уравнение

$$(2x-1)\sqrt{x-2}=7\sqrt{2}. \qquad (1)$$

Традиционное возведение обеих частей в квадрат приводит к кубическому уравнению

$$4x^3-12x^2+9x-100=0,$$

и большинство решающих пробует найти другой способ решения задачи.

Наверное, многие догадались, что можно попытаться найти один из корней уравнения, приравняв соответствующие множители:

$$\begin{cases} 2x-1=7, \\ \sqrt{x-2}=\sqrt{2}, \end{cases}$$

откуда $x=4$.

К сожалению, нередко на этом останавливаются и выписывают ответ. В итоге решение содержит грубейшую ошибку, несмотря на правильный ответ: мы «угадали» (единственный) корень уравнения, но не доказали, что больше корней нет.

В данном случае легко доказать, что других корней уравнение (1) не имеет, так как при $x>4$ имеем $2x-1>7$, $\sqrt{x-2}>\sqrt{2}$ и левая часть больше правой, а при $x<4$ (из области определения уравнения) $2x-1<7$, $\sqrt{x-2}<\sqrt{2}$, поэтому левая часть меньше правой.

Еще раз подчеркнем, что решение состоит из двух частей:

1) мы «угадываем» корень (или корни) уравнения;

2) доказываем, что больше корней уравнение не имеет.

Заметим, что примененный для решения (1) способ угадывания корней пригоден и в случае, когда вместо произведения в уравнении взята сумма. Например, в такой задаче:

2. Решите уравнение:

$$2x+\sqrt{x-2}=8+\sqrt{2}.$$

Число множителей (слагаемых) в подобных задачах может быть и большим; при этом некоторые из множителей следует положить равными 1, как, например, в следующей задаче:

3. Решите уравнение:

$$(2y-1)\sqrt{y-2}\,\sqrt[3]{y-3}=7\sqrt{2}.$$

Отметим, что способы угадывания корней могут быть разными. Рассмотрим, например, следующую задачу:

4. Решите уравнение:

$$2a+\sqrt{a-2}+\sqrt[3]{a-3}=9+\sqrt{2}. \qquad (2)$$

Естественно предположить, что $\sqrt{a-2}=\sqrt{2}$, откуда $a=4$. После этого легко проверить, что при $a=4$

$$2a+\sqrt[3]{a-3}=2\cdot4+\sqrt{1}=9.$$

Докажем теперь (аналогично задаче 1), что других корней уравнение (2) не имеет:

1) При $a>4$ имеем $2a>8$, $\sqrt{a-2}>\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{a-3}>1$, поэтому левая часть больше правой;

2) при $a<4$ (из области определения уравнения) левая часть меньше правой.

В. Е. Ольхов

Три решения одной задачи

Часто случается так, что мы не доводим своих рассуждений до конца и отказываемся от идей, которые у нас возникают. В данной заметке на примере одной задачи показывается, как разные идеи, далекие друг от друга в начальных стадиях, могут привести к цели, если проявить настойчивость в поисках решения.

Задача. *Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и биссектрисе прямого угла.*

Задача на вид сравнительно простая, но решить ее «с ходу» не удается.

Как известно, решение задач на построение состоит из 4 пунктов: 1) анализ,

2) построение, 3) доказательство, 4) исследование. Мы начнем с исследования, общего для всех трех способов решения задач. Пусть c, l_c, m_c, h_c — длины соответственно гипотенузы и проведенных из вершины прямого угла биссектрисы, медианы и высоты. В прямоугольном треугольнике имеем $m_c=c/2=R$, где R — радиус описанной вокруг треугольника окружности.

Биссектриса CD угла C (рис. 1) проходит через точку K — середину дуги AB. Поэтому (если $|AC|\neq|BC|$) она лежит между медианой и высотой, и ее проекция на гипотенузу меньше, чем проекция медианы на гипотенузу. Отсюда вытекает неравенство $h_c\leqslant l_c\leqslant m_c=c/2$ (равенства достигаются для равнобедренного треугольника). Поэтому при $l_c>c/2$ решений нет, при $l_c\leqslant c/2$ решение существует и единственно.

Отметим, что при $l_c=c/2$ треугольник — равнобедренный, в этом случае построение и доказательство очевидны. В дальнейшем мы будем предполагать, что $l_c<c/2$ (и треугольник неравнобедренный).

Первая идея. Центр окружности, описанной вокруг прямоугольного треугольника, лежит в середине *гипотенузы*, а *биссектриса* прямого угла проходит через середину дуги (полуокружности) AB, не содержащей точки C. Будем рассматривать треугольник вписанным в окружность. Тогда, возможно, удастся найти зависимости между данными и элементами, возникающими на чертеже, вытекающие из свойств треугольника, вписанного в окружность.

Анализ. Пусть треугольник ABC искомый. Опишем вокруг него окружность (см. рис. 1). Пусть M и K — точки пересечения окружности и ее диаметра, перпендикулярного AB. Тогда дуги AK и KB равны, поэтому CK — биссектриса угла C. Треугольник MCK — прямоугольный. Очевидно, что для решения задачи достаточно выразить длину отрезка CK через c и l_c.

Треугольники MCK и KOD подобны по двум углам. Обозначим длину отрезка DK через x. Тогда

$$\frac{|CK|}{|KM|}=\frac{|OK|}{|DK|}\ \text{или}\ \frac{l_c+x}{c}=\frac{c/2}{x},$$

откуда $x^2+l_cx-c^2/2=0$. Поэтому,

$$x=-l_c/2+\sqrt{l_c^2/4+c^2/2}$$

(ясно, что подходит только положительный корень уравнения). Далее

$$|CK|=l_c+x=l_c/2+\sqrt{l_c^2/4+c^2/2}. \quad (1)$$

Построение. Построим отрезок $d=\sqrt{l_c^2/4+c^2/2}$ как гипотенузу прямоугольного треугольника с катетами $l_c/2$ и $c/\sqrt{2}$, затем отрезок $l_c/2+d$. После этого построим прямоугольный треугольник CMK по гипотенузе $|MK|=c$ и катету $|CK|=l_c/2+d$ проведем окружность диаметра MK и построим диаметр AB этой окружности, перпендикулярный диаметру MK. Треугольник ABC искомый (см. рис. 1).

Доказательство. По построению $|AB|=c$, MK и AB — взаимно перпендикулярные диаметры, поэтому $\smile AK=\smile KB=90°$, $\widehat{ACK}=\widehat{KCB}=45°$, то есть CK — биссектриса (прямого) угла C. Осталось показать, что $|CD|=l_c$, где D — точка пересечения отрезков CK и AB.

Проведем доказательство методом от противного. Пусть, например, $|CD|=f>l_c$. Тогда в треугольнике ABC длина гипотенузы равна c, а длина биссектрисы CD — f, поэтому согласно (1)

$$|CK|=\frac{f}{2}+\sqrt{\frac{f^2}{4}+\frac{c^2}{2}}>\frac{l_c}{2}+\sqrt{\frac{l_c^2}{4}+\frac{c^2}{2}}=|CK|$$

(по построению), противоречие. Аналогично рассматривается случай $|CD|=f<l_c$.

При изложении второго и третьего способов решения задачи мы ограничимся только анализом. Построение и доказательство проведите самостоятельно.

Вторая идея. А не связан ли искомый треугольник с другим треугольником, имеющим с ним общие элементы,

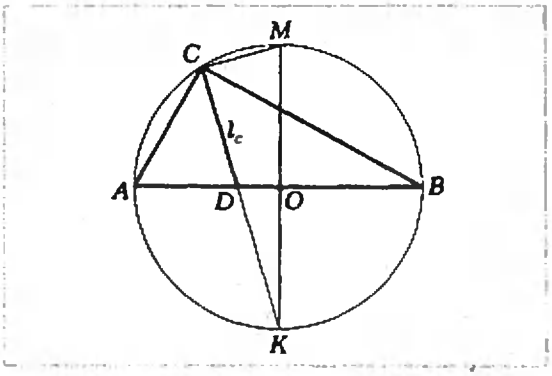


Рис. 1.

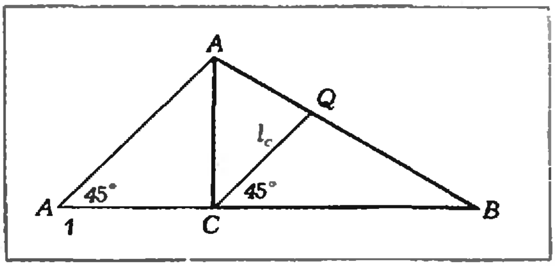


Рис. 2.

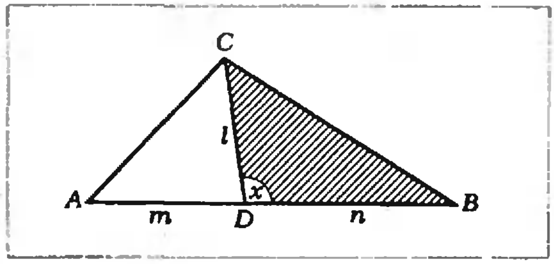


Рис. 3.

по которым его можно построить, а затем перейти к искомому треугольнику? Ну, скажем, искомый прямоугольный треугольник является частью тупоугольного или остроугольного треугольника, отсекаемой от него высотой. Последняя мысль подсказывает такой ход решения.

Пусть $\triangle ABC$ искомый. $|AB|=c$; $|CQ|=l_c=l$ (рис. 2). Пусть $|CB|=a$ и $|CA|=b$. Отложим на прямой BC отрезок $|CA_1|$, равный $|AC|$. $|CA_1|=|CA|=b$; $|A_1B|=a+b$; $\widehat{AA_1B}=45°$. Если найти длину $a+b$, то $\triangle A_1AB$ можно построить по двум сторонам и углу 45° против одной из них. Переход от $\triangle AA_1B$ к $\triangle ABC$ прост: для этого достаточно провести высоту AC в построенном треугольнике.

Для определения $a+b$ воспользуемся выражениями для площадей треугольников ABC, ACQ и BCQ.

$$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle CQB}+S_{\triangle AQC},$$

$$\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}al\sin 45°+\frac{1}{2}bl\sin 45°,$$

$$ab=\frac{l\sqrt{2}}{2}(a+b).$$

Учтя, что $a^2+b^2=c^2$, получим систему:

$$\begin{cases} a^2+b^2=c^2, \\ 2ab=\sqrt{2}l\,(a+b). \end{cases}$$

Складывая уравнения системы, получим уравнение относительно $a+b$:

$$(a+b)^2-\sqrt{2}l\,(a+b)-c^2=0,$$

откуда:

$$a+b=-\frac{l}{\sqrt{2}}+\sqrt{\left(\frac{l}{\sqrt{2}}\right)^2+c^2}.$$

Третья идея. А что если найти величину или построить угол BDC, образованный биссектрисой с гипотенузой? Тогда было бы возможно построить вспомогательный треугольник BDC по длине биссектрисы l, углам 45° и $\widehat{BDC}=x$. Переход к искомому прямоугольному треугольнику возможен путем продолжения стороны угла x, не равной l до длины c и соединения конца продолжения с вершиной угла, равного 45°.

Введем обозначения: $|AD|=m$, $|DB|=n$ (рис. 3).

Из $\triangle ACD$ по теореме синусов имеем:

$$\frac{|AD|}{\sin 45°}=\frac{|CD|}{\sin\hat{A}}.$$

Далее $\hat{x}=\hat{A}+45°$ (по свойству внешнего угла треугольника), откуда $\hat{A}=\hat{x}-45°$. Таким образом,

$$\frac{m}{\sin 45°}=\frac{l}{\sin(x-45°)}. \qquad (2)$$

Из $\triangle BCD$, тоже по теореме синусов, имеем:

$$\frac{|BD|}{\sin 45°}=\frac{|CD|}{\sin\hat{B}},\quad \frac{n}{\sin 45°}=$$

$$=\frac{l}{\sin(180°-(x+45°))},\quad \frac{n}{\sin 45°}=\frac{l}{\sin(x+45°)}. \qquad (3)$$

Сложим почленно равенства (2) и (3):

$$\frac{m+n}{\sin 45°}=\frac{l\,(\sin(45°+x)+\sin(x-45°))}{\sin(x-45°)\cdot\sin(x+45°)},$$

$$\frac{c}{\sin 45°}=\frac{2l\sin x\cos 45°}{\sin(x-45°)\cdot\sin(x+45°)}=$$

$$=\frac{2l\sin x\cos 45°}{-\cos(x+45°)\cdot\sin(x+45°)},$$

то есть

$$c=-\frac{2l\sin x}{\sin(2x+90°)}=$$

$$=-\frac{2l\sin x}{\cos 2x}=\frac{2l\sin x}{2\sin^2 x-1},$$

откуда

$$2c\sin^2 x-2l\sin x-c=0.$$

Найдем из этого уравнения $\sin x$:

$$\sin x=\frac{l\pm\sqrt{l^2+2c^2}}{2c};$$

так как $\sin x>0$, то годится только положительный корень. Итак,

$$\sin x=\frac{l+\sqrt{l^2+2c^2}}{2c}.$$

По условию $0<\sin x\leqslant 1$. Наибольшее

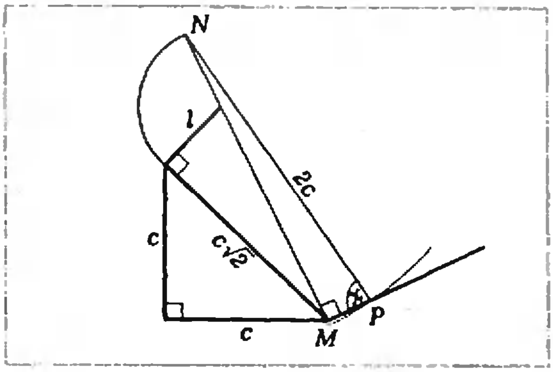


Рис. 4.

возможное значение для l равно $\frac{c}{2}$. В этом случае

$$\sin x=\frac{\frac{c}{2}+\sqrt{\frac{c^2}{4}+2c^2}}{2c}=\frac{\frac{c}{2}+\frac{3c}{2}}{2c}=1.$$

Этот результат согласуется с тем, что при условии $l=\frac{c}{2}$, $l=m=h$ и $\hat{x}=90°$.

Построение угла x. Построим отрезок $c\sqrt{2}$ как гипотенузу прямоугольного треугольника с катетами c и c. Затем построим отрезок $\sqrt{l^2+(\sqrt{2}c)^2}$ как гипотенузу прямоугольного треугольника с катетами l и $c\sqrt{2}$. Дальше все ясно из рисунка 4. В $\triangle MPN$, $\widehat{MPN}=\hat{x}$.

Мы привели три способа решения этой задачи, — а не найдете ли вы другого решения?

Н. П. Грицаенко

Избранные школьные задачи

Восьмой класс

1. Пусть K, M, N — соответственно основания высот AK, BM, CN остроугольного треугольника ABC. Докажите, что:

а) треугольники AMN, BNK и CKM подобны треугольнику ABC (и между собой), при этом для каждого из них коэффициент подобия равен косинусу их общего с треугольником ABC угла;

б) AK, BM, CN — биссектрисы углов треугольника KMN.

2. а) Восьмой член геометрической прогрессии равен 10. Найдите произведение всех ее членов от первого до пятнадцатого включительно.

б) Найдите сумму

$$x+2x^2+3x^3+4x^4+\ldots+nx^n.$$

3. Пусть в треугольнике ABC точка M делит сторону AB в отношении $m:n$, считая от вершины B, а точка N делит сторону BC в отношении $p:q$, считая от вершины B. Докажите, что отношение площадей треугольника BMN и BAC равно $\frac{m}{m+n}\cdot\frac{p}{p+q}$.

4. В арифметической прогрессии

$$S_m=S_n.$$

Найдите S_{m+n} (через S_k обозначена сумма первых k членов прогрессии).

5. а) Пусть хорды AB и CD одной окружности пересекаются в точке E. Докажите, что $AE\cdot EB=CE\cdot ED$.

б) Пусть из точки E, лежащей вне окружности, проведены к ней касательная EA (A — точка касания) и секущая EBC (B и C — точки окружности). Докажите, что $EA^2=EB\cdot EC$.

в) Пусть через точку E, удаленную от центра окружности радиуса R на расстояние a, проведена прямая, пересекающая окружность в точках A и B. Докажите, что $EA\cdot EB=|a^2-R^2|$ (не забудьте, что точка E может лежать как внутри, так и вне или на окружности).

Девятый класс

6. Существует ли многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами, такой что $P(7)=11$, $P(11)=13$?

7. Могут ли две противоположные грани четырехугольной пирамиды быть перпендикулярными основанию?

8. а) Верно ли, что сумма двух рациональных чисел рациональна?

б) Может ли сумма двух иррациональных чисел быть рациональной?

в) Докажите, что числа:

0,12345...99100... (бесконечная десятичная дробь, в которой после запятой подряд выписываются все натуральные числа) и $\operatorname{tg} 5°$ иррациональны.

9. Для каких n в сечении куба плоскостью можно получить правильный n-угольник?

10. а) Докажите, что

$$\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}=-\frac{1}{2}.$$

Преобразуйте в произведение следующие суммы:

б) $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha+\ldots+\sin(n\alpha)$;

в) $\sin^2\alpha+\sin^2 2\alpha+\sin^2 3\alpha+\ldots+\sin^2(n\alpha)$.

Десятый класс

11. Пусть шар касается всех ребер тетраэдра. Докажите, что суммы длин пар его скрещивающихся ребер равны.

12. Пусть плоскость пересекает боковые ребра тетраэдра так, что отношения длин отсеченных отрезков к длинам ребер равны соответственно a/b, c/d, e/f. Докажите, что объемы отсеченного и исходного тетраэдров относятся как $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}$ (сравните с задачей 3).

13. Пусть α, β, γ — углы треугольника. Докажите, что:

а) $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma<\frac{3}{2}$;

б) $\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}<\frac{1}{8}$.

14. Постройте графики функций:

а) $y=\cos(\arccos x)$;

б) $y=\cos(3\arccos x)$;

в) $y=\arcsin(\sin x)$.

15. Пусть все плоские углы при одной из вершин тетраэдра прямые. Докажите, что эта вершина, точка пересечения медиан противоположной ей грани и центр описанного около тетраэдра шара лежат на одной прямой.

Публикацию подготовил Ж. М. Раббот

Квант для младших школьников

Задачи

1. Два двузначных простых числа получаются друг из друга перестановкой цифр, а их разность — полный квадрат. Какие это числа?

2. По десяти дорожкам сквера в направлении стрелок бегают спортсмены. Каждую дорожку каждый из спортсменов пробегает за 1 минуту, причем по одной из дорожек каждую минуту пробегает лишь один спортсмен, по другой — два, по третьей — три и т. д., по десятой — 10 спортсменов. Расставьте на рисунке номера дорожек.

3. Мама сварила в одинаковых кастрюлях компот и кисель и, открыв крышки, поставила их охлаждаться на окно. Через полчаса я потрогал кастрюли. Какая из них оказалась теплее?

4. На доске было написано два одинаковых числа. Степа приписал к одному из них впереди 100, а ко второму сзади 1. Оказалось, что первое число ровно в 37 раз больше второго. Какие числа были написаны на доске?

5. Вырежьте из листа клетчатой бумаги кусок, состоящий из наименьшего целого числа клеток такой, что, играя на нем в «крестики — нолики», начинающий всегда выигрывает (для победы в игре в «крестики — нолики» нужно поставить три своих значка подряд).

Эти задачи нам предложили: *Н. К. Антонович, Л. П. Мочалов, А. В. Бялко, А. Н. Меснякин, А. П. Савин*

Текст А. П. Савина, рисунки Э. В. Назарова

задачник Кванта

Задачи

М891 — М895, Ф903 — Ф907

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 31 января 1985 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 11 — 84» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М891, М892» или «Ф903». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи М893, М894, М895 а) предлагались на 47-й Московской городской олимпиаде в марте 1984 года.

М891. Окружность касается двух сторон треугольника и двух его медиан. Докажите, что этот треугольник равнобедренный.

А. А. Муратов

М892. а) Докажите, что среди чисел 2^m+2^k, а также среди чисел 3^m+3^k бесконечно много квадратов, а среди чисел 4^m+4^k, 5^m+5^k и 6^m+6^k нет ни одного квадрата целого числа (здесь m и k — натуральные числа, $m\neq k$).

б)* Есть ли квадраты среди чисел 7^m+7^k?

А. И. Зайчик

М893. Каждые два из n блоков ЭВМ соединены проводом. Можно ли каждый их этих проводов покрасить в один из $n-1$ цветов так, чтобы от каждого блока отходило $n-1$ проводов разного цвета, если а) $n=6$; б) $n=13$?

В. Б. Алексеев

М894. а) Сумма пяти неотрицательных чисел равна 1. Докажите, что их можно расставить по кругу так, чтобы сумма пяти попарных произведений соседних чисел не превосходила 1/5.

б)* По кругу расставлено $n\geqslant 4$ неотрицательных чисел, сумма которых равна 1. Докажите, что сумма всех n попарных произведений соседних чисел не превосходит 1/4.

С. Б. Гашков, А. Н. Дранишников

М895*. Докажите, что площадь сечения куба плоскостью, касающейся вписанной в него сферы, не превосходит половины площади грани куба. Рассмотрите случаи, когда это сечение а) треугольник, б) четырехугольник. в) Докажите, что в случае а) площадь полной поверхности отсекаемого от куба тетраэдра меньше площади грани куба.

С. Б. Гашков, И. Ф. Шарыгин

Ф903. На верхней образующей гладкого цилиндра радиуса R, ось которого наклонена под углом α к горизонту, укреплена гибкая невесомая веревка длины l (рис. 1). К другому концу веревки прикреплен небольшой груз. Определить:

1) длину свисающей части веревки в положении равновесия груза;

2) период малых колебаний груза в вертикальной плоскости, параллельной оси цилиндра.

С. С. Кротов

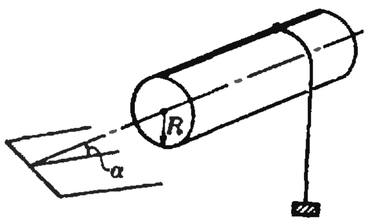


Рис. 1.

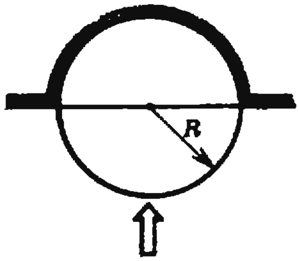


Рис. 2.

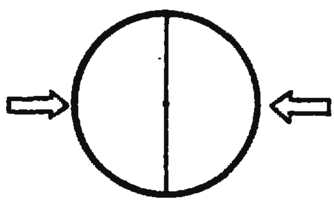


Рис. 3.

Рис. 4.

Ф904. Сферу радиуса R, составленную из двух одинаковых плотно пригнанных тонкостенных полусфер массы m каждая, наполняют жидкостью с плотностью ρ.

1) Какую вертикальную силу надо приложить к нижней полусфере, чтобы жидкость не выливалась, если верхняя сфера закреплена (рис. 2)?

2) С какой силой надо сжимать левую и правую полусферы (рис. 3), чтобы жидкость не выливалась?

Л. Г. Маркович

Ф905. Тонкостенный заполненный газом цилиндр массы M с высотой H и площадью основания S плавает в воде (рис. 4). В результате потери герметичности в нижней части цилиндра его глубина погружения увеличилась на ΔH. Каково было начальное давление газа в цилиндре? Атмосферное давление p, температура не меняется.

О. Ю. Никишина

Ф906. Проводник, сопротивление которого зависит от температуры, подключили к источнику постоянного напряжения U. Сопротивление проводника меняется в зависимости от температуры по закону $R=R_0(1-\mu t)$, где R_0 — сопротивление при $t=0\,^\circ\mathrm{C}$, $\mu>0$. Определить установившуюся температуру проводника, если температура окружающей среды равна $0\,^\circ\mathrm{C}$, а тепловая мощность, выделяемая проводником в окружающую среду, равна $W=b\cdot\Delta t$, где Δt — разность температур проводника и среды. Изменением размеров проводника из-за теплового расширения пренебречь.

Р. Ю. Винокур

Ф907. Два металлических шара массы m каждый с радиусами r и $2r$ помещены в электрическое поле, напряженность которого направлена от большего шара к меньшему и равна E. Расстояние между центрами шаров равно $R_0=4r$. Большой шар несет заряд $q\left(k\frac{q}{r^2}\ll E\right)$, малый шар не заряжен. Шары отпускают. Время между первым и вторым соударениями шаров равно τ. Найти время между n-ым и $(n+1)$-ым соударениями и пути, которые пройдут шары между этими соударениями. Чему равно среднее ускорение шаров за достаточно большой промежуток времени? Соударения считать абсолютно упругими.

А. А. Лапидес

Problems

M891 — M895; P903 — P907

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandart ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The

M891. A circle touches two sides of a triangle and two of its medians. Prove that this triangle is isosceles.

A. A. Muratov

M892. a) Prove that there are infinitely many squares of integers among the numbers 2^m+2^k and also among the numbers 3^m+3^k, but there are no squares

more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than January 31st, 1985 to the following address: USSR, Moscow, 103006, Москва, К-6, ул. Горького, д. 32/1, «Квант».
Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS). Problems M893, M894 and M895 a) were proposed at the 47th Moscow City Olympiad in march, 1984.

among the numbers 4^m+4^k, 5^m+5^k and 6^m+6^k (m and k here are natural numbers, $m\neq k$).

b)* Are there squares among the numbers 7^m+7^k?

A. I. Zaichik

M893. Each two of n blocks of a computer are connected by a wire. Is it possible to paint each wire in one of $n-1$ colours so that the colours of all the wires coming out of any block will be different if a) $n=6$, b) $n=13$?

V. B. Alekseev

M894. a) The sum of five non-negative numbers equals 1. Prove that they can be set around a circle so that the sum of the five pairwise products of neighbouring numbers does not exceed 1/5.

b)* The sum of $n\geqslant 4$ non-negative numbers which are set around a circle equals 1. Prove that the sum of n pairwise products of neighbouring numbers does not exceed 1/4.

S. B. Gashkov, A. N. Dranishnikov

M895. Prove that the area of the section of a cube by a plane tangent to the inscribed sphere of the cube does not exceed half of the area of the cube's face. Consider the cases when the section is a) a triangle, b) a quadrangle. c) Prove that in case a) the surface area of the tetrahedron cut off from the cube is less than the area of the cube's face.

S. B. Gashkov, I. F. Sharygin

P903. A flexible weightless string of length l is tied to the upper circle of a cylinder of radius R, whose axis forms the angle α with the horizon (see Fig. 1). A small weight is tied to the other end of the string. Determine
1) the length of the freely hanging part of the string when the weight is in equilibrium;
2) the period of the weight's small oscillations in the vertical plane parallel to the cylinder's axis.

S. S. Krotov

P904. A sphere of radius R made out of two identical hemispheres of mass m, closely fitting together, is filled with a liquid of density ρ.
1) What vertical force must be applied to the lower hemisphere to keep the water from pouring out if the upper hemisphere is fixed (see Fig. 2)?
2) With what force should the left and right hemispheres (Fig. 3) be squeezed together in order to keep the water from pouring out?

L. G. Markovich

P905. A thin-walled cylinder of altitude H and base area S has mass M; it is filled with gaz and floats in water (Fig. 4). As the result of a leak in its lower part, the cylinder's depth increases by ΔH. What was the initial pressure of the gaz in the cylinder? The atmospheric pressure is p, the temperature does not change.

O. Yu. Nikishina

P906. A conductor whose resistance depends on temperature is connected to a source of constant tension U. The resistance of the conductor depends on temperature according to the rule $R=R_0(1-\mu t)$, where R_0 is the resistance at $t=0$ °C, $\mu>0$. Determine the established temperature of the conductor if the surrounding temperature is 0 °C, while the power of heat loss to the surroundings is $W=b\cdot\Delta t$, where Δt is the temperature difference between the conductor and the surroundings. Changes in the conductor's size may be neglected.

P. Yu. Vinokur

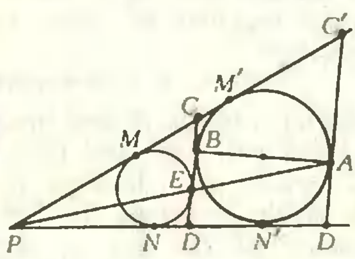
P907. Two metallic balls of mass m each, whose radii are r and $2r$ are placed in an electric field whose tension is directed from the larger ball to the smaller one and equals E. The distance between the centres of the balls is $R_0=4r$. The larger ball carries the charge q ($kq/r^2 \ll E$), the small one is uncharged. The ball are released. The time between the first and second collisions of the ball is τ. Find the time between the n-th and $(n+1)$-st collisions and the distance covered by the balls during that time. What is their average acceleration during a sufficiently long period of time? The collisions are assumed absolutely elastic.

A. A. Lupides

Решения задач

М876 — М878, М880*); Ф887 — Ф889

М876. *На окружности, касающейся сторон угла с вершиной P, выбраны две диаметрально противоположные точки A и B (отличные от точек касания). Касательная к окружности в точке B пересекает стороны угла в точках C и D, а прямую OA — в точке E. Докажите, что длины отрезков BC и DE равны.*



Будем считать, что окружность расположена вне треугольника PCD (см. рисунок; второй случай, когда она вписана в этот треугольник, рассматривается аналогично). Пусть C' и D' — точки пересечения сторон угла с касательной к окружности в точке A, так что (в рассматриваемом случае) данная окружность вписана в треугольник $PC'D'$. Очевидно, что этот треугольник гомотетичен треугольнику PCD с центром P, следовательно, E — точка касания вписанной окружности треугольника PCD со стороной CD. Обозначим через M, M', N и N' точки касания этих двух окружностей с прямыми PC и PD. По теореме о равенстве касательных, проведенных к окружности из одной точки,

$$2|BC|+|BE|=|BC|+|CE|=|M'C|+|CM|=|M'M|,$$

аналогично,

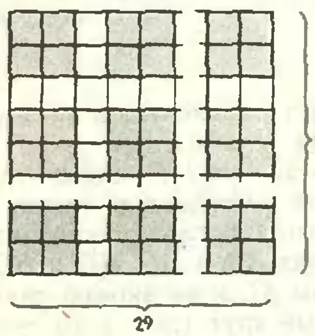
$$2|DE|+|BE|=|N'N|,$$

но, по той же теореме, $|M'M|=|PM'|-|PM|=|PN'|-|PN|=|N'N|$, поэтому $|BC|=|DE|$, что и требовалось.

А. С. Меркурьев

*) Решение задачи М879 войдет в статью «Теорема Виета и вспомогательный многочлен», публикуемую в «Кванте» № 12 за этот год.

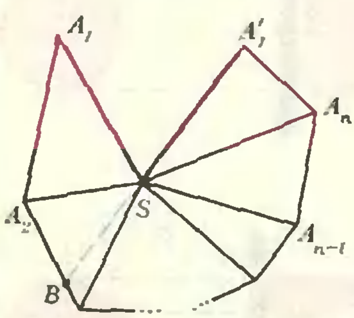
М877. *Из листа клетчатой бумаги размерами 29×29 клеток вырезали 99 квадратиков размерами 2×2 каждый. Докажите, что из него можно вырезать еще один такой квадратик.*



На рисунке серым цветом закрашены 100 квадратиков 2×2. Вырезая из исходного квадрата 29×29 любой квадратик 2×2, мы «задеваем» ровно один серый квадратик. Следовательно, после 99 таких операций один из серых квадратиков останется нетронутым.

С. В. Фомин

М878. *Докажите, что если сумма плоских углов при вершине пирамиды больше 180°, то каждое боковое ребро пирамиды меньше полупериметра ее основания.*



◆

Пусть $SA_1 \ldots A_n$ — данная пирамида. Разрежем ее боковую поверхность по ребру SA_1 и развернем ее на плоскость (см. рисунок, на котором SA_1 и SA_1' — это два экземпляра ребра SA_1, образовавшиеся в результате разрезания, так что $|SA_1| = |SA_1'|$). Из условия задачи следует, что точка S лежит внутри многоугольника $A_1 \ldots A_n A_1'$. Продолжая отрезок $A_1'S$ за точку S до пересечения с ломаной $A_1 \ldots A_n A_1'$, мы получим точку B, разбивающую ломаную на две части: ломаную $A_1 \ldots B$ длины a и ломаную $A_1' \ldots B$ длины b. Из неравенств $|SA_1| < a + |SB|$, $|A_1'S| + |SB| = |A_1'B| < b$ следует, что

$$2|SA_1| = |SA_1| + |SA_1'| < a + |SB| + |A_1'S| = a + b = |A_1A_2| + \ldots + |A_{n-1}A_n| + |A_nA_1'|.$$

Остается заметить, что в правой части стоит периметр основания пирамиды.

Ю. И. Ионин

М880*. *В последовательности 1, 0, 1, 0, 1, 0, ... каждый член, начиная с седьмого, равен последней цифре суммы шести предыдущих. Докажите, что в этой последовательности не встретятся подряд шесть чисел 0, 1, 0, 1, 0, 1.*

◆

Эту задачу схематически можно представить так: задано преобразование некоторого множества (множества шестерок чисел; шестерке $(x_1, \ldots, x_6)$ сопоставляется $(x_2, \ldots, x_6, x_7)$, где x_7 — последняя цифра суммы $x_1 + \ldots + x_6$); требуется доказать, что повторяя это преобразование, из одной данной «точки» множества (шестерки (1, 0, 1, 0, 1, 0)) нельзя получить другую (шестерку (0, 1, 0, 1, 0, 1)). Очень часто такие задачи удается решить, найдя *инвариант*, то есть величину, не изменяющуюся при заданном преобразовании: достаточно установить, что значения инварианта для двух данных «точек» различны*).

В нашем случае такой величиной может служить последняя цифра числа $s(x_1, \ldots, x_6) = 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 + 10x_5 + 12x_6$. В самом деле, простое вычисление показывает, что разность $s(x_2, \ldots, x_7) - s(x_1, \ldots, x_6)$ (где x_7 — последняя цифра $x_1 + \ldots + x_6$) равна $10x_7 + 2(x_7 - (x_1 + \ldots + x_6))$, то есть оканчивается ну-

*) Об инвариантах мы рассказывали неоднократно: см., например, статью А. Ходулева «Расселение фишек» («Квант», 1982, № 7, с. 28); там же приводятся ссылки и на другие статьи по этой теме. Ряд задач на инварианты можно найти в «Кванте» № 10 за 1983 г. на с. 30.

лем. Следовательно, последние цифры чисел $s(x_1, ..., x_6)$ и $s(x_2, ..., x_7)$ совпадают: указанная нами величина — действительно инвариант. Остается проверить, что ее значения для заданных в условии шестерок различны:

$$s(1, 0, 1, 0, 1, 0) = 18, \; s(0, 1, 0, 1, 0, 1) = 24.$$

А. С. Меркурьев

◆

Ф887. *На прозрачное стеклянное тело, представляющее собой два соединенных основаниями конуса, падает пучок параллельных световых лучей, имеющий круглое сечение диаметра d (рис. 1,а). Размеры тела указаны на рисунке 1,а; показатель преломления стекла n. Какая картина будет наблюдаться на экране, установленном на расстоянии l от тела?*

Изображение на экране будет различным в зависимости от соотношения между a, d и l.

1) Рассмотрим случай, когда луч $l(l')$ после преломления на грани $AB(AD)$ попадает в точку C (см. рис. 1, а). В этом случае после двукратного преломления лучей (на гранях AB и DC, AD и BC) пучок остается параллельным AC и на экране получится равномерно освещенный круг (рис. 1, б) диаметра d. Получающаяся картина от l не зависит. Значения d_1, при которых осуществляется такой

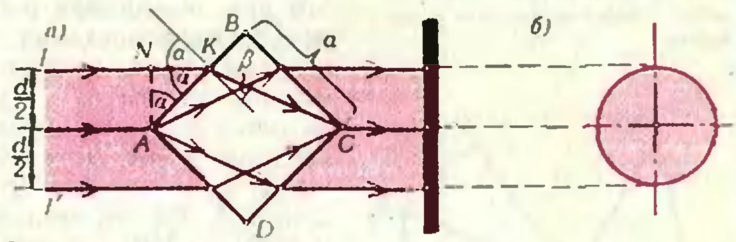


Рис. 1.

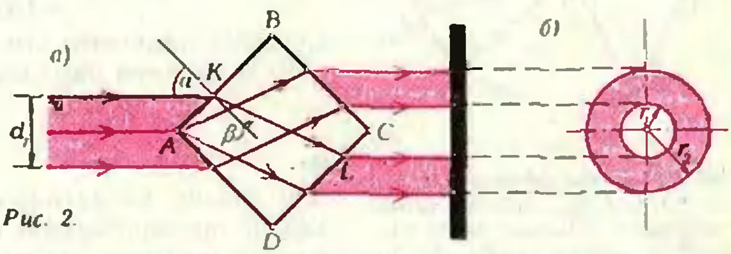


Рис. 2.

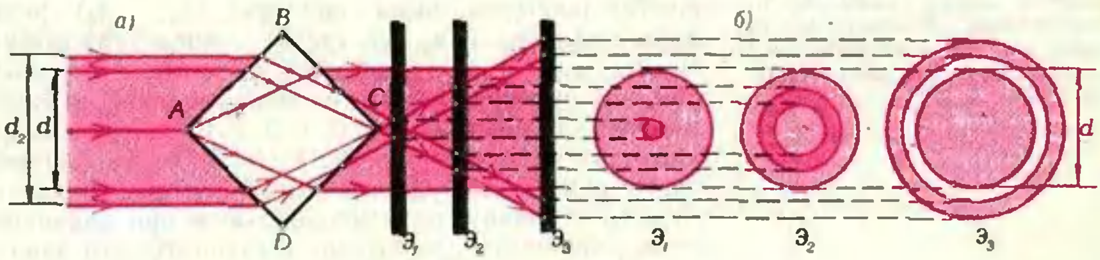


Рис. 3.

вариант, определим из рисунка 1, а:

$$\frac{d_1}{2} = |KA| \sin\alpha = (a - |BK|)\sin\alpha = (1 - \operatorname{tg}\alpha)\sin\alpha.$$

Подставляя

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \; \sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n}, \; \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{1}{\sqrt{2n^2 - 1}},$$

получаем:

$$d_1 = a\sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2n^2-1}}\right).$$

2) Пусть $0<d_2<a\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2n^2-1}}\right)$. В этом случае каждый луч после двукратного преломления будет вновь параллелен AC (рис. 2, *а*). На экране получится равномерно освещенное кольцо (рис. 2, *б*). Радиусы внутренней и внешней окружностей кольца —

$$r_1=\frac{a}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2n^2-1}}\right)+\frac{d_2}{2\sqrt{2}},$$

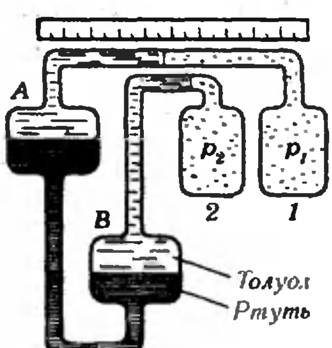
$$r_2=\frac{a}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2n^2-1}}\right)+\frac{d_2}{2\sqrt{2}}(1+2\sqrt{2}).$$

Получающаяся картина от l не зависит.

3) Пусть $a\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2n^2-1}}\right)<d_2<a\sqrt{2}$. В этом случае (рис. 3, *а*) картина, получающаяся на экране, зависит от того, на каком расстоянии от точки C находится экран. На рисунке 3, *б* показаны картины, получающиеся при разных положениях экрана: $Э_1$, $Э_2$, $Э_3$.

А. В. Хельвас

Ф888. *На рисунке изображена принципиальная схема гравиметра — прибора для измерения вариаций ускорения свободного падения g. В теплоизолированных газовых баллонах 1 и 2 давления соответственно $p_1\approx 2\cdot 10^4$ Па и $p_2\approx 3\cdot 10^4$ Па. Цилиндрические сосуды A и B радиуса 10 см и соединяющая их трубка заполнены ртутью. Поверх ртути налита очень легкая жидкость (толуол); эта жидкость заполняет также частично капилляры радиуса 1 мм, соединяющие сосуды A и B с баллонами 1 и 2. Опишите процесс измерения вариаций ускорения g с помощью этого прибора. Какова величина вариаций g, которые можно зарегистрировать этим гравиметром, если известно, что при измерениях в разных пунктах изменения разности горизонтальных смещений толуола в капиллярах могут достигать нескольких*



◆

Предположим, что в некотором пункте на поверхности Земли разность уровней ртути в сосудах A и B оказалась равной h_0. Если разность давлений p_2 и p_1 в сосудах фиксирована, то из условия $p_2-p_1=$ $=\varrho g_0h_0$ определяется значение ускорения свободного падения g_0 в данном пункте:

$$g_0=\frac{p_2-p_1}{\varrho h_0}.$$

В другом пункте ускорение будет отличаться от g_0; пусть оно равно $g=g_0+\Delta g$. Разность уровней ртути в сосудах A и B будет теперь $h=h_0+\Delta h$. При сохраняющейся разности давлений в сосудах и при малых вариациях Δg и, соответственно, малых приращениях Δh

$$\frac{\Delta h}{h_0}\approx\frac{\Delta g}{g_0}.$$

Таким образом, порядок величины вариаций Δg определяется порядком измеряемого значения Δh. Измерить непосредственно малые приращения Δh трудно. Чтобы определить значение Δh, поверх ртути наливают легкую жидкость: если разность горизонтальных смещений уровней толуола в капиллярах равна Δl (эта величина измеряется), то, очевидно,

$$\Delta h\cdot S=\Delta l\cdot s,$$

где S и s — площади сечений сосудов и капилляров, соответственно. Следовательно,

$$\frac{\Delta g}{g_0}\approx\frac{\Delta h}{h_0}=\frac{s}{S}\frac{\Delta l}{h_0}=\frac{s}{S}\left(\frac{\varrho g_0\cdot\Delta l}{p_2-p_1}\right).$$

По условию $s/S\sim 10^{-4}$, $\varrho\sim 10^4$ кг/м^3, $(p_2-p_1)\sim$ $\sim 10^4$ Па, $\Delta l\sim 10^{-2}$ м. Поскольку $g_0\sim 10$ м/с^2, отно-

миллиметров (до 1 см)? Температура во время разных измерений поддерживается постоянной; плотность ртути $\varrho = 13{,}5\cdot 10^3$ кг/м³.

сительные вариации g_0, измеряемые прибором,

$$\frac{\Delta g}{g_0} \sim \frac{10^{-4}\cdot 10^4\cdot 10\cdot 10^{-2}}{10^4} = 10^{-5}.$$

Ю. М. Брук

Ф889. *Солнце находится на угловой высоте φ над горизонтом. Под каким углом α к поверхности Земли нужно бросить тело в вертикальной плоскости, проходящей через Солнце, чтобы тень тела прошла наибольший путь по Земле?*

◆

Рассмотрим отдельно случаи, соответствующие различным соотношениям между α и φ.

1) Если бросать тело под углом $\alpha \leqslant \varphi$, то путь, проходимый тенью за время полета тела, будет равен дальности полета, то есть $S_1 = \frac{1}{g} v_0^2 \sin 2\alpha$ (см. рис. 1).

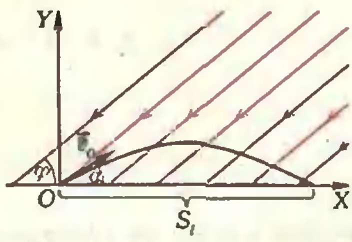


Рис. 1.

При $\varphi < 45°$ ($\alpha < 45°$) значение S_1 тем больше, чем больше α; следовательно, надо бросать тело под углом $\alpha = \varphi$, и тогда

$$S_{1\,max} = \frac{1}{g} v_0^2 \sin 2\varphi. \qquad (1)$$

Если же $\varphi \geqslant 45°$, то α должно быть равным 45°, так как S_1 максимально при $\alpha = 45°$ (в этом случае $S_{1\,max} = \frac{1}{g} v_0^2$).

2) Если бросать тело под углом $\alpha > \varphi$, то тень пройдет путь, равный (см. рис. 2)

$$S_2 = 2|OA| + S_x = 2|OA| + \frac{1}{g} v_0^2 \sin 2\alpha. \qquad (2)$$

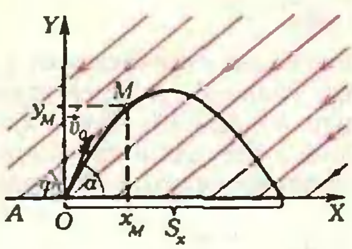


Рис. 2.

Найдем $|OA|$. Для этого нам надо получить уравнение касательной к параболе в точке M и определить абсциссу x_A точки пересечения касательной с осью X ($|x_A| = |OA|$).

Чтобы получить уравнение касательной AM, определим координаты x_M и y_M точки M. Угловой коэффициент касательной равен $\operatorname{tg}\varphi$ и равен производной функции $y(x)$, описывающей параболу, в точке M. Нетрудно показать, что

$$y(x) = (\operatorname{tg}\alpha)x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2,$$

и следовательно,

$$\operatorname{tg}\varphi = \left((\operatorname{tg}\alpha)x_M - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x_M^2\right)' = \operatorname{tg}\alpha - \frac{g}{v_0^2\cos^2\alpha}x_M,$$

откуда

$$x_M = \frac{1}{g}(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\varphi)v_0^2\cos^2\alpha,$$

$$y_M = \frac{1}{g}\operatorname{tg}\alpha(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\varphi)v_0^2\cos^2\alpha -$$

$$-\frac{1}{2g}(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\varphi)^2 v_0^2\cos^2\alpha = \frac{1}{2g}(\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\varphi)v_0^2\cos^2\alpha.$$

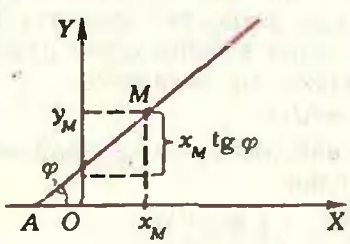


Рис. 3.

Теперь мы можем записать уравнение касательной AM (см. рис. 3) —

$$y_{AM}(x) = x\operatorname{tg}\varphi + \frac{1}{2g}(\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\varphi)v_0^2\cos^2\alpha -$$

$$-\frac{1}{g}\operatorname{tg}\varphi(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\varphi)v_0^2\cos^2\alpha =$$

$$= x\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{2g}(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\varphi)^2 v_0^2\cos^2\alpha$$

— и найти абсциссу x_A точки A (и $|OA| = |x_A|$):

$$y_{AM}(x_A)=0 \Rightarrow x_A=-\frac{1}{2g\,\mathrm{tg}\,\varphi}(\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\varphi)^2 v_0^2\cos^2\alpha.$$

Таким образом, если тело брошено под углом $\alpha>\varphi$, то тень проходит путь (см. (2))

$$S_2=\frac{1}{g}v_0^2\sin 2\alpha+\frac{1}{g\,\mathrm{tg}\,\varphi}(\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\varphi)^2 v_0^2\cos^2\alpha.$$

Посмотрим, при каких значениях α это выражение максимально. Для этого найдем производную $S'(\alpha)$ и приравняем ее нулю:

$$S'(\alpha)=\frac{2}{g}v_0^2\cos 2\alpha+$$
$$+\frac{1}{g\,\mathrm{tg}\,\varphi}v_0^2(\sin 2\alpha+2\,\mathrm{tg}\,\varphi\cos 2\alpha-\mathrm{tg}^2\varphi\sin 2\alpha)=0,$$

или

$$(1-\mathrm{tg}^2\varphi)\sin 2\alpha=0 \Rightarrow \sin 2\alpha=0 \Rightarrow \alpha=90^\circ$$

(случай $\alpha=0$ нам не подходит, так как $\alpha>\varphi$).

Следовательно, S_2 максимально при $\alpha=90^\circ$, то есть когда тело бросают вертикально вверх, и (см. рис. 4)

$$S_{2\max}=2h_{\max}\,\mathrm{ctg}\,\varphi=\frac{1}{g}v_0^2\,\mathrm{ctg}\,\varphi.$$

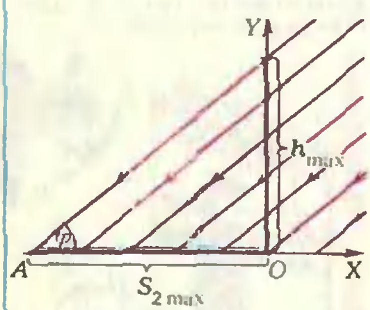


Рис. 4.

Теперь выясним, при каких условиях $S_{2\max}>S_{1\max}$ и при каких $S_{2\max}<S_{1\max}$. Для этого найдем отношение $S_{1\max}:S_{2\max}$ (см. (1)):

$$\frac{S_{1\max}}{S_{2\max}}=\frac{v_0^2\,g\sin 2\varphi}{v_0^2\,g\,\mathrm{ctg}\,\varphi}=2\sin^2\varphi.$$

При $\varphi=45^\circ$ это выражение равно 1 ($S_{1\max}=S_{2\max}$) — тень проходит одинаковые пути при $\alpha=45^\circ$ и при $\alpha=90^\circ$. Если $\varphi<45^\circ$, то $2\sin^2\varphi<1$ ($S_{1\max}<S_{2\max}$) — тень проходит максимальный путь при $\alpha=90^\circ$. При $\varphi>45^\circ$, как мы уже говорили, $S_{1\max}=\frac{1}{g}v_0^2$, и $S_{1\max}:S_{2\max}=\mathrm{tg}\,\varphi>1$ — тень проходит максимальный путь при $\alpha=45^\circ$.

Выпишем окончательный ответ:

если $\varphi<45^\circ$ — тело надо бросать вертикально;
если $\varphi=45^\circ$ — тело надо бросать либо вертикально, либо под углом 45° к горизонту;
если $\varphi>45^\circ$ — тело надо бросать под углом 45° к горизонту.

В. А. Нахшин

Задача для исследования

Операция «произведение соседних чисел» в таблице из ±1

В связи с двумя задачами Всесоюзной олимпиады этого года (№ 5 для 10 класса и № 8 для 9 класса; см. с. 47—48) естественно возникают следующие более общие вопросы.

Для каждой таблицы T размера $m\times n$, в клетках которой стоят числа 1 и —1, определяется новая таблица $P(T)$: в каждой ее клетке пишется число, равное произведению чисел, стоящих в соседних (имеющих с ней общую сторону) клетках в таблице T. Для каких m и n:

1) разным таблицам T соответствуют обязательно разные таблицы $P(T)$?

2) для любой таблицы T в последовательности таблиц $T_1=P(T)$, $T_2=P(T_1)$, ... встретится таблица из одних 1?

Попробуйте ответить на эти вопросы для других (по-видимому, более простых) случаев: «цилиндрической», таблицы $m\times n$, у которой две противоположные стороны длины m считаются склеенными, и для «тора», у которого считаются склеенными две пары противоположных сторон (при этом у каждой клетки ровно четыре соседних).

Заметим, что вопрос 2) для цилиндра высоты $m=1$, то есть для n клеток по окружности, разбирался в «Задачнике Кванта»; положительный ответ на него получается при $n=2^k$ ($k=2,3,...$).

Н. Б. Васильев, И. К. Жук

КВАНТ УЛЫБАЕТСЯ

Из вступительных работ в ВЗМШ

Место работы и должность ваших родителей.

Отец — начальник,
мать — городская больница

* * *

Дайте алгоритм выигрыша...

1-й ход — по диагонали, 2-й тоже, в конце партии — по обстоятельствам.

Выигрывает тот, кто больше думает.

* * *

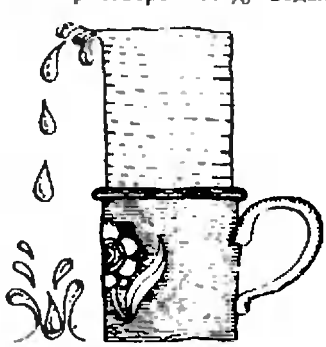
Найти $\sqrt{\underbrace{0{,}99\ldots9}_{100\text{ раз}}}$ *с точностью до 100 знаков.*

Решение: $0,\underbrace{\ldots\ldots\ldots}_{100\text{ раз}}$

Т. к. $\sqrt{0{,}9}$ не извлекается, то $\sqrt{0{,}99\ldots9}$ тоже не извлекается.

* * *

... в растворе 200 % воды.



Для точности будем взвешивать на медицинских весах.

* * *

Занумеровать ребра куба не то чтобы вовсе нельзя, но у нас не выполняется данное условие.

Построение затруднений не вызывает, т. к. оно понятно объяснено.

* * *

Туман — это множество мелких водяных паров.

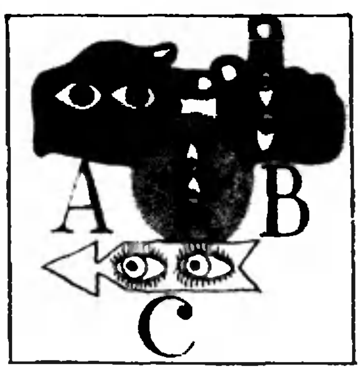
* * *

Любая часть правой части оси больше любой части левой части оси.

... число больше 0, но меньше 1, значит оно равно 1/2.

Сколько многочисленных решений имеет уравнение?

Единица всегда кончается на 0 или на 5.



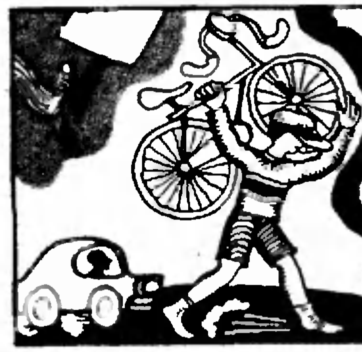
..., где значки над буквами говорят, куда смотреть.

Трехзначные числа: 6,25 и 0,625.

* * *

Никакие признаки подобия сюда не подходят, но если измерить углы транспортиром, то треугольники подобны.

Пусть угол A будет наибольшим в треугольнике. Но в данном случае угол A не наибольший.



* * *

Тогда, если пренебречь несколькими километрами, то можно сказать, что велосипедист прошел тот же путь.

* * *

Я думаю, что, проверяя работу, вы примете во внимание сжатые сроки и мою любовь к математике.

Какие данные в задаче лишние? Ответ: Сколько я ее ни решал, она не решается. Значит, у нее нет решения. Значит, все данные — лишние.

* * *

Тогда задача будет решена, но у меня не хватает не то времени, не то знаний.

* * *

Подробные рассуждения, лишившие меня сна, я опустил, т. к. не смог правильно сформулировать свои мысли и догадки.

* * *

Кубанский привет вам, товарищи жюри.

Собрал *Л. Ф. Штернберг*

XVIII Всесоюзная олимпиада по математике

Кандидат физико-математических наук
Л. П. КУПЦОВ,
кандидат физико-математических наук
С. В. РЕЗНИЧЕНКО,
кандидат физико-математических наук
А. Б. СОСИНСКИЙ

С 11 по 18 апреля в Ашхабаде проводился заключительный этап XVIII Всесоюзной олимпиады школьников по математике. В столице Советской Туркмении собрались 159 школьников (43 восьмиклассника, 54 девятиклассника и 62 десятиклассника) — победители республиканских олимпиад, победители московской и ленинградской городских олимпиад и школьники, отмеченные на предыдущей Всесоюзной олимпиаде дипломами I и II степени. В состав жюри, работавшего под руководством академика АН УССР Б. В. Гнеденко, были включены 52 человека — представители Академии наук СССР, Академий наук Туркменской и Молдавской ССР, Московского, Ленинградского и Новосибирского Государственных университетов, Московского физико-технического института, крупнейших научно-исследовательских институтов страны. Среди них старший преподаватель Туркменского Государственного университета, организатор всех республиканских олимпиад в Туркмении Б. Б. Бердыев.

С первых минут пребывания на гостеприимной Туркменской земле участники олимпиады были окружены теплотой и вниманием. В аэропорту Ашхабада команды-участницы встречали ученики школ города, представители районных отделов народного образования и ЦК комсомола Туркмении. При регистрации каждому участнику олимпиады и руководителю команды вручался памятный сувенирный пакет с книгами и открытками, рассказывающими о Туркмении, памятными значками, программой олимпиады и приглашением принять участие в ее торжественном открытии.

12 апреля, в 15 часов, все участники олимпиады, члены жюри и оргкомитета, руководители команд собрались у городского Дворца пионеров. В сопровождении оркестра началось торжествённое шествие к памятнику В. И. Ленину. У памятника был выстроен почетный караул, участники олимпиады возложили цветы. А затем в конференц-зале Академии наук ТССР состоялось торжественное открытие олимпиады. Были исполнены Государственный Гимн СССР и Гимн Туркменской ССР. С теплыми словами приветствия к участникам олимпиады обратился Министр просвещения ТССР М. А. Олиева. Успешного выступления, творческой, интересной работы, честного соперничества пожелали ребятам Вице-президент АН ТССР О. О. Овезгельдыев, председатель жюри академик АН УССР Б. В. Гнеденко, первый секретарь ЦК ЛКСМ Туркменистана Ж. К. Чарыева, ректор Туркменского Государственного университета Г. М. Мяликгулыев. На открытии олимпиады присутствовали зав. отделом науки и учебных заведений ЦК Компартии Туркменистана Е. О. Овлякулиев, зав. отделом науки и учебных заведений Совета Министров ТССР С. К. Какаев. Завершил торжественное открытие концерт участников коллективов художественной самодеятельности Ашхабадского Дворца пионеров.

Задания заключительного этапа олимпиады участники писали 13 и 14 апреля. Задание каждого из двух дней состояло из четырех задач, на решение которых отводилось по пять часов. Ниже приводятся условия всех задач. Некоторые из них включены в задачник «Кванта» (соответствующий номер указан после условия задачи).

Задачи

Первый день

8 класс

1. а) Произведение некоторых n чисел равно n, а сумма их равна нулю. Докажите, что число n делится на 4.

б) Пусть n — натуральное число, делящееся на 4. Докажите, что найдутся n целых чисел, произведение которых равно n, а сумма равна нулю.

А. А. Фомин

2. Докажите, что для любых неотрицательных чисел a и b справедливо неравенство

$$\frac{1}{2}(a+b)^2+\frac{1}{4}(a+b)\geqslant a\sqrt{b}+b\sqrt{a}.$$

А. Н. Смоляков

3. На плоскости расположены два равносторонних треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$, вершины которых занумерованы по часовой стрелке. Из произвольной точки O отложены векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, равные, соответственно, векторам $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{B_1B_2}$, $\overrightarrow{C_1C_2}$. Докажите, что точки A, B, C также являются вершинами равностороннего треугольника.

Л. П. Купцов

4. Имеется четыре краски и бесконечно много квадратных плиточек со стороной длины 1. Разрешается окрашивать стороны плиточек так, чтобы цвета всех сторон у каждой плиточки были равные, и приклеивать плиточки друг к другу сторонами одного цвета. Для каких чисел m и n из этих плиточек можно склеить прямоугольник размера $m\times n$, у которого каждая сторона покрашена одним цветом и цвета всех сторон разные?

В. А. Уфнаровский

9 класс

1. Докажите, что при всех действительных $x>0$, $y>0$ и при всех действительных α справедливо неравенство

$$x^{\sin^2\alpha}\cdot y^{\cos^2\alpha}<x+y.$$

В. И. Буренков

2. Имеется куб и две краски: красная и зеленая. Двое играют в такую игру. Начинающий выбирает 3 ребра куба и красит их в красный цвет. Его партнер выбирает 3 ребра из тех, что еще не покрашены, и красит их в зеленый цвет. После этого снова 3 ребра в красный цвет красит начинающий, а затем 3 ребра в зеленый цвет — его партнер. Запрещается перекрашивать ребро в другой цвет или красить дважды одинаковой краской. Выигрывает тот, кто первым сумеет покрасить своей краской все ребра какой-нибудь грани. Верно ли, что начинающий при правильной игре обязательно выигрывает?

Н. Х. Агаханов

3. По кругу записаны $n\geqslant 3$ натуральных чисел так, что для каждого числа отношение суммы его соседей к нему является натуральным числом. Докажите, что сумма всех таких отношений: а) не меньше $2n$; б) меньше $3n$ (М875).

О. Р. Мусин

4. Окружность с центром в точке O, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон BC, AC, AB, соответственно, в точках A_1, B_1, C_1. Отрезки AO, BO, CO пересекают окружность соответственно в точках A_2, B_2, C_2. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке.

И. Ф. Шарыгин

10 класс

1. При каких целых m и n выполняется равенство

$$(5+3\sqrt{2})^m=(3+5\sqrt{2})^n?$$

(М874 а)).

Ю. В. Михеев

2. В строку в возрастающем порядке выписали n различных действительных чисел. Под ними во вторую строку выписали те же числа, только, быть может, в другом порядке. Для каждой пары чисел, выписанных одно под другим, вычислили сумму. Эти суммы образовали третью строку. Оказалось, что числа в третьей строке также расположены в возрастающем порядке. Докажите, что первая строка совпадает со второй.

А. В. Анджанс

3. Дан треугольник ABC. Через точку P провели прямые PA, PB, PC, которые пересекли описанную около этого треугольника окружность в точках A_1, B_1, C_1, отличных от вершин треугольника. Оказалось при этом, что треугольник $A_1B_1C_1$ конгруэнтен треугольнику ABC. Докажите, что существует не более восьми точек P с указанным свойством.

И. Ф. Шарыгин

4. Положительные числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x^2+xy+\dfrac{y^2}{3}=25,\\ \dfrac{y^2}{3}+z^2=9,\\ z^2+zx+x^2=16.\end{cases}$$

Вычислите величину $xy+2yz+3zx$.

А. А. Болотов

Ребята довольно успешно справились с задачами, предложенными в первый день. Наибольшие трудности, как и ожидалось, вызвали задачи 8.4, 9.3, 9.4, 10.3 и 10.4. Особенно трудной оказалась задача 9.3. Лишь два участника сумели правильно решить оба ее пункта. Очень трудной оказалась и геометрическая задача 10.3, аккуратное решение которой представили лишь 3 участника. Однако ни в одном из классов не было задачи, которую бы никто не сумел решить. Жюри с удовлетворением отметило, что довольно трудную задачу 9.4 девятиклассники решали значительно лучше, чем ожидалось, причем многие ребята сумели найти такие решения, которые оказались проще решения, известного жюри.

13 апреля, после завершения работы над конкурсными заданиями, ребята приняли участие в спортивном празднике.

Второй день

8 класс

5. Учитель написал на доске квадратный трехчлен $x^2+10x+20$, после чего по очереди каждый из учеников увеличил или уменьшил на единицу либо коэффициент при x, либо свободный член, но не оба сразу. В результате на доске оказался написан квадратный трехчлен $x^2+20x+10$. Верно ли, что в некоторый момент на доске был написан квадратный трехчлен?

А. А. Берзиньш

6. Монету радиуса r перемещают по плоскости так, что ее центр обходит контур выпуклого

Председатель жюри академик Б. В. Гнеденко на экскурсии с участниками олимпиады.

многоугольника, описанного около круга радиуса $R>r$ и имеющего периметр p. Найдите площадь фигуры, образованной следом монеты.

А. А. Фомин

7. Имеется $n+1$ гирь общим весом $2n$ и весы с двумя чашками, находящиеся в равновесии. Вес каждой из гирь выражается натуральным числом. Гири по очереди кладут из чашки весов: сначала самую тяжелую (или одну из самых тяжелых), затем самую тяжелую из оставшихся и так далее. При этом каждую следующую гирю кладут на ту чашку весов, которая в данный момент легче, а если весы находятся в равновесии, то на любую из чашек. Докажите, что после того, как на весах окажутся все гири, весы будут находиться в равновесии.

А. В. Анджанс

8. Назовем натуральное число *абсолютно простым*, если оно простое и если при любой перестановке его цифр снова получается простое число. Докажите, что в записи абсолютно простого числа не может содержаться более трех различных цифр.

А. Т. Колотов

9 класс

5. Цифры $x\neq 0$ и y таковы, что при любом $n\geqslant 1$ число $\underbrace{x\ldots x}_{n}6\underbrace{y\ldots y}_{n}4$ является квадратом некоторого целого числа. Найдите все такие x и y.

Л. П. Купцов

6. На прямой взяты четыре различные точки, обозначенные в порядке следования буквами A, B, C, D. Докажите, что для любой точки E, не лежащей на прямой AD, справедливо неравенство

$$|AE|+|ED|+\big|\,|AB|-|CD|\,\big|>|BE|+|CE|.$$

С. Б. Гашков

7. Последовательность (x_n) задана рекуррентным образом:

$$x_1=1;\ x_2=-1;\ x_{n+2}=x_{n+1}^2-\frac{1}{2}x_n,$$

если $n\geqslant 1$. Докажите, что последовательность (x_n) имеет предел, и найдите его.

Н. Х. Агаханов

8. В белых клетках шахматной доски размером 1983×1984 записаны числа 1 или -1 так, что для любой черной клетки произведение чисел, стоящих в соседних с ней белых клетках, равно 1. Докажите, что это возможно только в том случае, если все записанные числа равны 1.

О. В. Ляшко

10 класс

5. В клетках квадратной таблицы 3×3 записаны числа 1 или -1. Для каждой клетки таблицы вычислим произведение чисел, стоящих в соседних с ней клетках (соседними называются клетки, имеющие общую сторону). После этого впишем вычисленные произведения в клетки таблицы вместо стоявших там ранее чисел. С новой таблицей проделаем ту же операцию, и т. д. Докажите, что после некоторого числа таких операций в таблице будут записаны одни единицы. (М871)

И. К. Жук, И. В. Воронович

6. Какое из чисел больше:

$$\frac{2}{201}\ \text{или}\ \ln\frac{101}{100}\ ?$$

Ю. В. Нестеренко

7. На плоскости расположены три окружности c_1, c_2, c_3 с центрами c_1, c_2, c_3 и радиусами r_1, r_2, r_3 соответственно, причем каждая лежит вне двух других. Пусть $r_1>r_2$, $r_1>r_3$, пусть A — точка пересечения внешних касательных к окружностям c_1 и c_2 — лежит вне окружности c_3, пусть B — точка пересечения внешних касательных к окружностям c_1 и c_3 — лежит вне окружности c_2. Из точки A проведены касательные к окружности c_3, из точки B — к окружности c_2. Докажите, что эти две пары касательных, пересекаясь, образуют четырехугольник, в который можно вписать окружность. Вычислите радиус этой окружности. (М872).

Л. П. Купцов

8. Докажите, что любое сечение куба плоскостью, проходящей через центр куба, имеет площадь, не меньшую площади грани куба.

А. А. Болотов

С заданиями второго дня ребята также справились, в целом, хорошо. В восьмом классе задачи второго дня были примерно равны по сложности задачам первого дня. Наибольшие трудности вызвала задача 8.8, которую правильно решили примерно 20 % участников. В десятом классе наиболее сложной оказалась задача 10.8, но и ее решили более трети десятиклассников. Неожиданно довольно трудной оказалась задача 10.6. Однако, в целом, задачи второго дня в 10-м классе были проще, чем задачи первого дня, и ребята с ними успешно справились. Задание второго дня в девятом классе было более сложным, чем задание первого дня. Никто из девятиклассников не сумел полностью решить все четыре задачи. Особенно трудной оказалась задача 9.7, которую сумели решить лишь 3 участника, тогда как 42 участника так и не смогли подступиться к ее решению. Более трудными, чем ожидалось, оказались задачи 9.1 и, особенно, 9.2. Радует, что и во второй день для некоторых задач ребята сумели найти свои, оригинальные решения, которые не были известны жюри.

17 апреля во Дворце пионеров состоялось торжественное закрытие олимпиады. Участникам олимпиады были вручены дипломы, грамоты и памятные призы. По итогам двух дней Дипломами I степени были награждены 16 участников, Дипломами II степени — 34 участника, Дипломами III степени — 32 участника. Были вручены также призы за оригинальные решения отдельных задач первого и второго дней, учрежденные Министерством высшего и среднего специального образования ТССР, ЦК ЛКСМ Туркмении, редакциями газет и журналов республики, редакцией и редколлегией журнала «Квант». Призы «Кванта» получили восьмиклассники Гундерс Коктс (Рига), Володя Усатюк (Владивосток), Кристина Бендорфа (Рига), Володя Тарьев (п. Красногвардейск, БССР), девятиклассники Айнарс Скуиньш (Рига), Айна Розыева (Ашхабад), Вадим Михайлов (Москва), десятиклассники Гульджахан Сахчиева (ТССР), Озот Акназаров (Уз. ССР), Игорь Трусов (Орел), Геннадий Маргвелашвили (Кутаиси). Специальный приз «С пожеланием успехов» был вручен ученице 9 класса школы № 6 г. Ашхабада Союнгулыевой Майе — первой девочке-туркменке, принявшей участие в заключительном этапе Всесоюзной математической олимпиады. Успешно выступили в Ашхабаде победители предыдущей олимпиады. Особенно хотелось бы отметить девятиклассницу Ольгу Леонтьеву и десятиклассника Федора Назарова, второй год подряд удостоенных Дипломов I степени. Оргкомитет Олимпиады-XVIII передал символическую эстафету представителю Белорусской ССР — республики, которой поручено проведение XIX Всесоюзной математической олимпиады.

Вечером 17 апреля состоялась встреча участников олимпиады с редколлегией журнала «Квант», на которой редактор отдела математики А. Б. Сосинский рассказал о профессии математика, а заместитель главного редактора, член жюри Всесоюзной олимпиады Ю. П. Соловьев рассказал о новейших приложениях геометрии к физике. Затем был проведен традиционный математический бой между командой жюри и командой участников. В упорной борьбе победу одержала команда участников олимпиады.

Очень насыщенной получилась культурная программа олимпиады. Для участников олимпиады были организованы увлекательные экскурсии по историческим местам Ашхабада и его окрестностям. Ребята побывали на развалинах крепости Ниса, построенной на территории древнего парфянского царства, в поселке Фирюза, посмотрели тюльпанные поля, посетили производственное объединение «Туркменковер», ВДНХ, Ботанический сад, Институт Солнца АН ТССР, встретились с деятелями искусства и кино Туркмении. Интересно прошла встреча участников олимпиады с академиком АН УССР Б. В. Гнеденко, учеными АН ТССР.

Быстро пролетели восемь дней, которые провели на гостеприимной туркменской земле участники олимпиады, но добрую память об этих днях ребята сохранят надолго.

XVIII Всесоюзная олимпиада по физике

Кандидат физико-математических наук
Ю. А. САМАРСКИЙ,
Л. В. ЧЕРНОВА

Восемнадцатый раз Всесоюзная олимпиада по физике собрала талантливых школьников всех союзных республик — победителей республиканских олимпиад этого года и призеров предыдущей Всесоюзной олимпиады — для участия в ответственных соревнованиях заключительного этапа олимпиады. На этот раз финальные соревнования проводились с 11 по 18 апреля в столице Армении — Ереване. Не случайно свое «совершеннолетие» олимпиада встречала в Советской Армении — республике с замечательными традициями физической науки.

Для участников олимпиады была выпущена специальная брошюра «Физика в Армении», которая открывалась приветствием Президента АН СССР академика А. П. Александрова и Председателя Центрального Оргкомитета Всесоюзной олимпиады школьников академика И. К. Кикоина:

«Дорогие друзья!

Мы горячо поздравляем вас с тем, что вы удостоились права принять участие в XVIII Всесоюзной олимпиаде по физике. Само участие в олимпиаде — это уже большая победа, которой вы добились своим трудолюбием и талантом. Мы хотим подчеркнуть, что талант без трудолюбия мало чего стоит...

Вам, участникам нынешней олимпиады, через несколько лет предстоит включиться в большую и серьезную работу по применению физики в самых различных областях техники и других наук...

В эти дни вам предстоит серьезное испытание. На Всесоюзной физической олимпиаде легких задач не бывает.

Мы от всей души желаем вам выдержать это испытание. Желаем больших успехов в учении и дальнейшей профессиональной работе».

На торжественном открытии, которое состоялось 12 апреля, все выступавшие были единодушны в своих добрых пожеланиях участникам олимпиады.

Утром 13 апреля состоялся теоретический тур заключительного этапа олимпиады, в котором приняли участие 144 школьника. Восьмиклассникам предлагались 4 задачи (на работу отводилось 4 часа), девятиклассникам и десятиклассникам — по 5 задач (на их решение давалось 5 часов). Приведем условия этих задач (часть из них была опубликована в Задачнике «Кванта» в 8—10 номерах журнала за этот год).

Задачи теоретического тура

8 класс

1. Батарея водяного отопления поддерживает в комнате температуру $t_0 = +18$ °С при температуре наружного воздуха $t_1 = -20$ °С. Когда температура наружного воздуха понизилась до $t_2 = -22$ °С, а в комнате включили плитку мощностью $N = 1$ кВт, оказалось, что температура в комнате не изменилась. Какое количество теплоты в одну секунду выделяет батарея водяного отопления?

2. Для измерения распределения скорости ветра по высоте используются шары-зонды, которые имеют постоянную вертикальную скорость подъема. При запуске такого шара была получена зависимость угла α возвышения шара над горизонтом от времени (рис. 1). Полагая скорость ветра у поверхности Земли равной нулю, а расстояние от места запуска шара до наблюдателя равным 1 км (рис. 2), определите высоту подъема шара через 7 минут после запуска и скорость ветра на этой высоте.

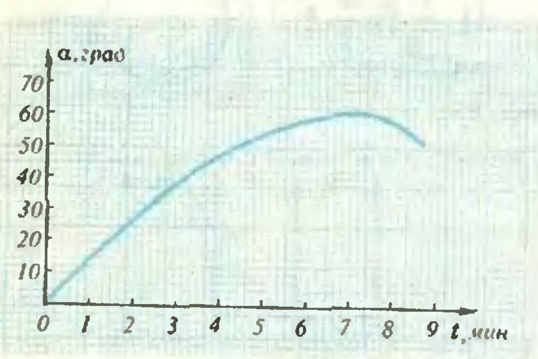


Рис. 1.

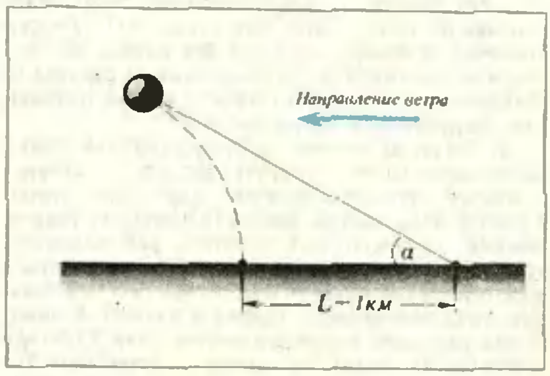


Рис. 2.

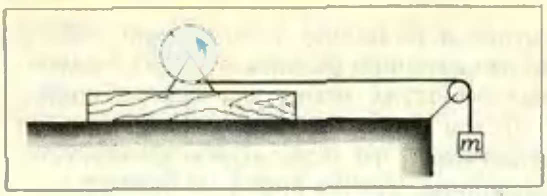


Рис. 3.

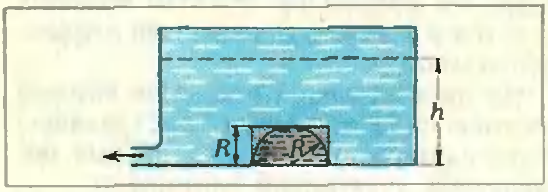


Рис. 4.

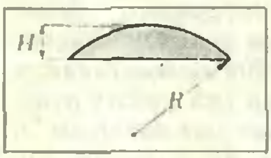


Рис. 5.

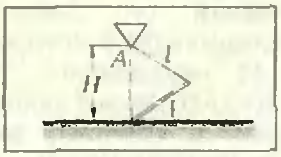


Рис. 6.

3. На бруске, лежащем на гладком столе, укреплена ось, вокруг которой может свободно вращаться валик радиуса $R=2,5$ см (рис. 3). К концу нити, намотанной на валик и перекинутой через невесомый блок, подвешивают груз массы m. Начав равноускоренно двигаться из состояния покоя, груз за время $t=3$ с опустился на расстояние $s=63$ см. Сколько оборотов совершил за это время валик, если масса бруска с валиком в $k=92$ раза больше массы груза? Трением пренебречь.

4. На дне большого закрытого сосуда, заполненного водой, лежит перевернутая чашка массы m. Чашка имеет форму цилиндра радиуса R и высоты R с полусферической полостью, радиус которой также равен R (рис. 4). Полость заполнена ртутью. Воду из сосуда начинают медленно откачивать. 1) Определите, при какой высоте h столба воды в сосуде чашка оторвется от его дна и ртуть начнет вытекать из-под ее краев. 2) Найдите высоту ртути в полости, когда из сосуда откачают всю воду. Давлением паров воды пренебречь. Плотность воды ϱ и плотность ртути ϱ_1 считать известными. Примечание. Объем шарового сегмента высоты H и радиуса R равен $\pi H^2(R-H/3)$ (рис. 5).

9 класс

1. Однородная палочка длины l привязана невесомой нитью длины l к неподвижной точке A (рис. 6). Нижний конец палочки может скользить без трения по горизонтальному столу. Расстояние от точки A до стола равно H $(l<H<2l)$. Палочка начинает двигаться без начальной скорости из положения, изображенного на рисунке 6. Найдите максимальную скорость центра палочки при последующем движении.

2. Одна из гипотез о происхождении пояса астероидов (малых планет) восходит к древнегреческой легенде о Фаэтоне, сыне бога солнца Гелиоса, пораженном Зевсом (Юпитером) ударом молнии. Согласно этой гипотезе, рой каменных глыб, из которого должна была сформироваться гипотетическая планета Солнечной системы Фаэтон, слишком близко подошел к планете Юпитер и под влиянием гравитационного поля Юпитера распался на отдельные глыбы — астероиды. По оценкам радиус роя составлял примерно 10^4 км, а масса роя (суммарная масса астероидов) была в 10^6 раз меньше массы Юпитера. На каком расстоянии от центра Юпитера должен был пройти рой, чтобы он начал разваливаться?

3. В замкнутом сосуде находятся насыщенный водяной пар при температуре $t=100$ °C и остатки воды. Масса пара $M=100$ г, масса воды $m=1$ г. Сосуд нагревают, пока вся вода не испарится. До какой температуры надо нагреть сосуд? Какое количество теплоты для этого потребуется? Давление насыщенного пара возрастает на $\Delta p=3,7$ кПа при повышении температуры на $\Delta t=1$ °C. Удельная теплота испарения воды $r=2,26\cdot10^6$ Дж/кг, удельная теплоемкость водяного пара при постоянном объеме $c_V=1,38\cdot10^3$ Дж/(кг·К).

4. Часть графика, изображающего процесс, происходящий с идеальным одноатомным газом, утеряна (рис. 7). Масштабы по обеим осям известны (они указаны на рисунке 7). В течение всего процесса перехода из состояния 1 в состояние 2 газ отдал столько же тепла, сколько получил. Найдите работу, совершенную газом в этом процессе. Универсальная газовая постоянная $R=8,3$ Дж/(моль·К).

5. Три одинаковых конденсатора, каждый емкости C, соединили последовательно и подключили к батарее с ЭДС $\mathcal{E}$. После того как конденсаторы полностью зарядились, их отключили от батареи. Затем к ним одновременно подключили два резистора с сопротивлением R каждый так, как показано на рисунке 8. Какое количество теплоты выделится на каждом резисторе? Чему равны токи через резисторы в момент времени, когда напряжение на среднем конденсаторе в 10 раз меньше ЭДС батареи?

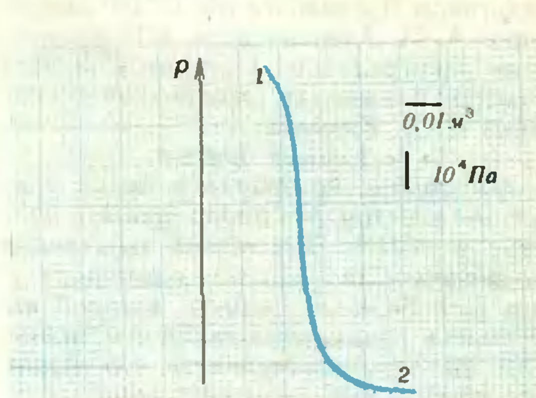


Рис. 7.

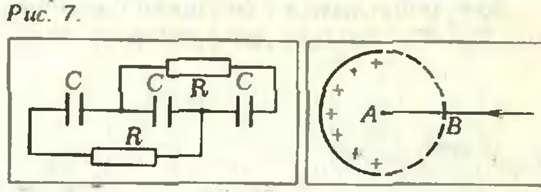


Рис. 8.

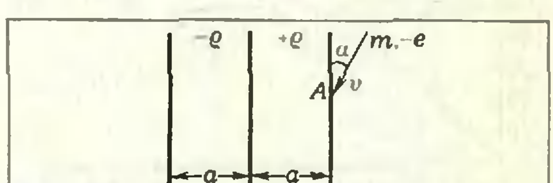


Рис. 9.

Призеры олимпиады по физике, получившие дипломы I степени. Слева направо: А. Севастьянов, Н. Ярунин, В. Барзыкин, И. Курников, Г. Григорьев, М. Свердлов, А. Алексеев, Л. Закревский, К. Мусаелян, И. Линдунен, М. Гринберг, А. Межлумян, Ю. Жестков.

10 класс

1. В одном из проектов для полетов космических аппаратов в Солнечной системе предполагалось использовать солнечный парус площадью $S=1$ км^2. Парус раскрывается, когда аппарат движется вокруг Солнца по земной орбите, радиус которой $R_З=1{,}5\cdot10^8$ км. При дальнейшем движении парус постоянно ориентирован перпендикулярно солнечным лучам, давление которых на земной орбите составляет $p=10^{-5}$ Па. 1) При какой массе космического аппарата он может улететь из Солнечной системы? 2) При какой максимальной массе аппарат может достичь орбиты Марса, радиус которой $R_М=2{,}3\cdot10^8$ км? Гравитационное влияние Земли и других планет не учитывать. Произведение массы Солнца на гравитационную постоянную $GM_С=1{,}3\cdot10^{11}$ км^3/с^2.

2. Тепловая машина Ползунова (одна из первых тепловых машин) работала следующим образом. В медный цилиндр с легким поршнем подавался водяной пар при температуре 100 °С. При этом поршень поднимался, совершая холостой ход. Затем пар в цилиндре охлаждался внешней водой при температуре 0 °С и конденсировался. Поршень опускался и через систему блоков поднимал груз, например уголь из шахты. Допустим, что для приготовления пара из воды с температурой 0 °С была сожжена 1 тонна угля. Пренебрегая трением и потерями тепла, определите, сколько угля было при этом поднято из шахты глубиной 100 м. Теплота сгорания угля $q=3{,}1\cdot10^7$ Дж/кг, теплоемкость воды $c=4200$ Дж/(кг·К), удельная теплота парообразования воды $r=2{,}26\cdot10^6$ Дж/кг, универсальная газовая постоянная $R=8{,}3$ Дж/(моль·К).

3. Находящаяся на бесконечности в состоянии покоя заряженная частица притягивается однородно заряженным полукольцом вдоль линии AB (рис. 9). Отношение скоростей частицы в точках A и B известно и равно $v_A/v_B=n$. Найдите отношение ускорений частицы в этих точках.

4. Два плоских слоя толщины a каждый равномерно заряжены объемным зарядом с плотностями $-\varrho$ и $+\varrho$ (рис. 10). Частица с отрицательным зарядом $-e$ и массой m подлетает к положительно заряженному слою со скоростью $\vec{v}$, направленной под углом α к поверхности слоя. 1) При каком значении скорости частица не сможет проникнуть в отрицательно заряженный слой? 2) Через сколько времени и на каком расстоянии от точки A частица в этом случае покинет положительно заряженный слой?

5. Узкий пучок света падает нормально на стеклянный шарик радиуса R с показателем преломления n. На расстоянии r от центра пучок рассеивается равномерно по всем направлениям на маленьком воздушном пузырьке, образовавшемся при изготовлении шарика. Какая часть рассеянного пузырьком света выйдет из шарика? Потерями света в стекле пренебречь. Примечание. Телесный угол, образуемый конусом с углом 2β при вершине, равен $\Omega=2\pi(1-\cos\beta)$.

После проверки работ теоретического тура жюри получило следующие данные, по которым можно было судить о том, насколько успешно учащиеся справились с заданием:

		Номера задач				
		1	2	3	4	5
Число работ с полным решением задачи	8 кл.	27	12	18	6	
	9 кл.	8	5	18	10	8
	10 кл.	17	27	17	36	27
Число учащихся, не решивших задачу	8 кл.	2	15	17	11	
	9 кл.	6	6	6	11	18
	10 кл.	—	2	23	9	12

Экспериментальный тур заключительного этапа проводился 15 апреля. Каждому участнику предлагалось по 2 задачи. Подробный разбор этих задач дан в статье В. А. Орлова и А. Г. Ростомяна «Экспериментальный тур олимпиады по физике», помещенной в этом же номере журнала.

Для всех участников олимпиады хорошим подарком была культурно-познавательная программа, тщательно продуманная радушными хозяевами. В программу вошли: праздник «День физики», вечера в школах, экскурсии в Бюракан и встреча с учеными Бюраканской астрофизической обсерватории, экскурсия в Звартноц и Эчмиадзин, посещение музеев и театров. Многим особенно запомнился день, когда состоялась поездка на озеро Севан, а затем на Олимпийскую спортивную базу в Цахкадзоре. Специально для ребят был включен подъемник, и вся прелесть весенней долины предстала с высоты птичьего полета.

Утром 17 апреля участники олимпиады встречались с членами редколлегии журнала «Квант». Было задано много вопросов, высказаны различные пожелания и предложения по работе журнала. Наиболее активные участники встречи были награждены книгами серии «Библиотечка «Квант» с автографами авторов.

В тот же день состоялось торжественное закрытие XVIII Всесоюзной олимпиады по физике и победителям были вручены награды. Имена призеров, получивших дипломы I, II и III степеней, приведены на странице. Специальный приз редколлегии и редакции журнала «Квант» — подшивка «Кванта» за прошлый год с автографом главного редактора академика И. К. Кикоина — была вручена девятикласснику из Находки С. Чередниченко. По итогам Всесоюзной олимпиады была сформирована команда Советского Союза для участия в Международной олимпиаде по физике.*)

Статья о XV Международной физической олимпиаде школьников, которая проходила летом этого года в Швеции, будет опубликована в следующем номере нашего журнала. (*Прим. ред.*)

В заключение желаем всем хорошей учебы и успехов в покорении вершин физики.

Экспериментальный тур олимпиады по физике

Кандидат педагогических наук
В. А. ОРЛОВ,
кандидат физико-математических наук
А. Г. РОСТОМЯН

В подготовке экспериментальных заданий заключительного тура XVIII Всесоюзной олимпиады школьников по физике приняли участие преподаватели и научные сотрудники Ереванского государственного университета, Ереванского физического института и Института физических исследований АН Армянской ССР. Большую организационную помощь оказали работники Ереванского института усовершенствования учителей и Министерства просвещения Армении.

Приведем условия всех экспериментальных задач и варианты их решений, предложенные участниками олимпиады.

8 класс

Задание 1. *Определите отношение масс сосудов.*

Оборудование: два прозрачных сосуда из одинакового материала (стекла), ведро с водой, липкая лента для отметки уровней воды, груша для переливания воды

На первом этапе решения задачи нужно было выразить отношение масс сосудов через отношение определенных объемов, а на втором этапе — найти метод определения этого отношения без использования линейки.

В один из сосудов (назовем его первым) наливаем такое количество воды, чтобы при опускании этого сосуда в ведро с водой он погружался до краев, но не тонул (рис. 1). В соответствии с условием плавания тел имеем

$$m_1 g + \varrho_0 V_0 g = \varrho_0 (V_0 + V_1 + V_c) g,$$

где m_1 — масса первого сосуда, ϱ_0 — плотность воды, V_0 — объем воды в сосуде, V_1 — объем сосуда, не заполненный водой, V_c — объем стекла, из которого изготовлен сосуд. Отсюда следует:

$$m_1 = \varrho_0 (V_1 + V_c) = \varrho_0 (V_1 + m_1/\varrho_c) = \frac{V_1}{1/\varrho_0 - 1/\varrho_c},$$

где ϱ_c — плотность стекла. Аналогично для массы второго сосуда получим

$$m_2 = \frac{V_2}{1/\varrho_0 - 1/\varrho_c}.$$

Следовательно, отношение масс

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{V_1}{V_2}.$$

Отношение объемов V_1/V_2 можно определить разными способами. Например, предварительно отметив липкой лентой уровни жидкости в сосудах в опытах по рисунку 1, наполним первый сосуд водой полностью, а из второго сосуда воду выльем. С помощью груши перельем из первого сосуда во второй объем V_1 и отметим уровень воды в нем. Повторяем такое переливание, каждый раз отмечая новый уровень, до тех пор, пока во втором сосуде не поместится максимальное целое число объемов V_1. Проведем эту же процедуру, переливая объемы V_2 из второго сосуда в первый. Таким образом первый сосуд будет проградуирован по V_2, а второй — по V_1. Теперь, взяв из первого сосуда некоторый объем n_1V_2 жидкости, перельем его в пустой второй сосуд и определим его значение по шкале второго сосуда: $n_1V_2=n_2V_1$. Тогда искомое отношение масс

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{V_1}{V_2}=\frac{n_1}{n_2}.$$

О. Волков (Горький), получивший высшую оценку за решение этой задачи, определил отношение V_2/V_1 следующим образом: с помощью груши он доливал воду в меньший (первый) сосуд до краев (от уровня V_0), а затем переливал этот долитый объем воды V_1 во второй сосуд столько раз, сколько было надо до его полного наполнения (от уровня V_0). Число таких переливаний и равно искомому отношению V_2/V_1.

Абсолютный победитель олимпиады по 8 классу *М. Свердлов* (Минск) решил задачу иначе. Опуская в ведро с водой сначала большой сосуд, а затем сразу два сосуда (один в другом) и поддерживая их в вертикальном положении, с помощью липкой ленты он отмечал объемы погруженной части большого сосуда (рис. 2). Из уравнения равновесия $m_2=\varrho_0V_2$ и $m_1+m_2=\varrho_0(V_1+V_2)$ получается $m_2/m_1=V_2/V_1$. Затем, наливая воду в большой сосуд до верхней отметки и переливая объем воды V_1 в пустой меньший сосуд, отмечался уровень воды в нем. Далее вода из объема V_2 отливалась порциями по V_1 с помощью меньшего сосуда с меткой и считалось число этих порций.

Во всех случаях искомое отношение масс сосудов получалось приблизительно равным трем.

Максимальное число баллов за эту задачу, кроме названных выше участников, получили *А. Курмис* (Рига) и *Н. Агазарян* (Ереван).

Задание 2. *Определите сопротивления трех резисторов.*

Оборудование: батарейка, два резистора с заданными сопротивлениями $R_1=1$ кОм и $R_2=1,3$ кОм, три резистора с неизвестными сопротивлениями R_3, R_4 и R_5, миллиамперметр с неизвестными пределами измерения, соединительные провода.

Решение задачи сводилось, по существу, к градуировке шкалы миллиамперметра в омах, подключая его в схему, приведенную на рисунке 3. Используя два эталонных сопротивления R_1 и R_2, можно было получить две точки на шкале миллиамперметра. Так как точки оказались близкими друг к другу, можно было считать участок шкалы, прилегающий к этим точкам, приблизительно линейным. Используя это, легко найти сопротивление R_3 неизвестного резистора, подключив его последовательно с первым резистором и определив их общее сопротивление R_1+R_3:

$$R_1+R_3=1200\ \text{Ом},\ \Rightarrow\ R_3=200\ \text{Ом}.$$

Аналогично определяется сопротивление R_4, только этот резистор нужно было подключить параллельно резистору с сопротивлением R_2 и определить сопротивление $R_2R_4/(R_2+R_4)$:

$$\frac{R_2R_4}{R_2+R_4}=1200\ \text{Ом},\ \Rightarrow\ R_4\approx 20\ \text{кОм}.$$

Сопротивление R_5 определяется непосредственно, используя линейность шкалы около выделенного участка:

$$R_5=1,5\ \text{кОм}.$$

Большинство решивших задачу делали иначе. Измерив силу тока I_1 и I_2, соответствующую резисторам R_1 и R_2 (в условных единицах), и учитывая, что сопротивление батарейки и амперметра много меньше сопротивления эталонных резисторов, рассчитывалось напряжение батарейки (в условных единицах), а затем по закону Ома определялись сопротивления R_1+R_3, $R_2R_4/(R_2+R_4)$ и R_5, откуда рассчитывались сопротивления R_3 и R_4.

Лучшие результаты при выполнении этого задания показали *Н. Агазарян* (Ереван), *И. Матуленис* (Вильнюс), *Г. Николаишвили* (Тбилиси), *А. Санников* (Ленинград), *М. Свердлов* (Минск).

9 класс

Задание 1. *Определите неизвестную емкость конденсатора.*

Оборудование: конденсатор неизвестной емкости C_x, конденсатор с заданной емкостью C_0 ($C_x \gg C_0=2$ мкФ), батарейка, два резистора, сопротивления которых превышают 10^5 Ом, два переключателя, миллиамперметр и соединительные провода.

Бо́льшая часть участников пыталась оценить неизвестную емкость непосредственно, сравнивая баллистические отбросы стрелки миллиамперметра при подключении к прибору конденсаторов емкостью C_0 и C_x, заряженных до напряжения батарейки. Однако в связи с тем, что емкость конденсатора C_0 мала, отброс стрелки миллиамперметра был настолько малым, что погрешность измерения достигала 500 %. Такое решение оценивалось невысоко.

Ю. Жестков (Алма-Ата) и *В. Барзыкин* (п. Черноголовка Московской обл.) все же использовали метод баллистического отброса, причем так, что оба отброса давал конденсатор большой емкости C_x (так что погрешность измерения не выходила за допустимые пределы), заряженный до разного напряжения. Составлялась схема, приведенная на рисунке 4. Сначала конденсатор емкостью C_x заряжался до напряжения батарейки, и измерялся баллистический отброс стрелки I_0, соответствующий заряду q_0. Затем с помощью переключателя K_2 часть заряда

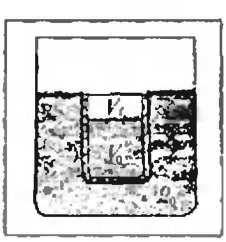


Рис. 1.

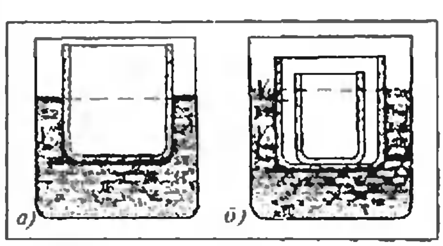


Рис. 2.

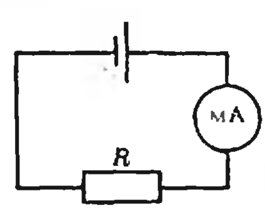


Рис. 3.

снималась на конденсатор емкостью C_0. Легко показать, что после n переключений на неизвестном конденсаторе остается заряд $q_n=(C_x/(C_x+C_0))^n q_0$. Откуда следует:

$$\frac{C_x}{C_x+C_0}=\sqrt[n]{\frac{q_n}{q_0}}=\sqrt[n]{\frac{I_n}{I_0}},\quad C_x=\frac{C_0}{1/\sqrt[n]{I_n/I_0}-1},$$

где I_n — отброс стрелки миллиамперметра после n переключений ключа K_2.

Еще одно интересное решение нашел *И. Линдунен* (Ленинград). Им была собрана схема по рисунку 5. Предварительно определив отношение сопротивлений резисторов: $R_2/R_1=2$, он заряжал конденсатор емкостью C_x с помощью n подключений заряженного конденсатора емкостью C_0. При этом подбиралось такое число переключений ключа K, чтобы при подключении миллиамперметра ток через него не шел. Это означает, что напряжение на неизвестном конденсаторе достигло значения $U_n=U_0R_1/(R_1+R_2)=U_0/3$. Несложно показать, что $U_n=U_0(\alpha^n-1)/\alpha^n$, где $\alpha=1+C_0/C_x$, отсюда

$$C_x=\frac{C_0}{\sqrt[n]{3/2}-1}.$$

Метод, предложенный Линдуненом, дает хорошую точность, только если сопротивления резисторов определяются с малой погрешностью. Определение отношения R_2/R_1 с помощью отношения сил токов, измеряемых миллиамперметром, дает погрешность порядка 10 %, что приводит к погрешности ~ 100 % при расчете неизвестной емкости C_x. Существенно повысить точность измерений можно было, переставив резисторы местами и повторив опыт еще раз.

После n переключений ключа K_2 в схеме, приведенной на рисунке 6, напряжение на неизвестном конденсаторе уменьшается от значения U_0 до U_n:

$$U_n=\beta^n U_0,\ \text{где}\ \beta=\frac{C_x}{C_0+C_x}.$$

Отсюда

$$\beta^n=\frac{U_n}{U_0}=\frac{R_1}{R_1+R_2}.$$

Поменяв резисторы местами, после m переключений, в результате которых показания миллиамперметра, как и в предыдущем опыте, будут равны нулю, получим

$$U_m=\beta^m U_0,$$

откуда

$$\beta^m=\frac{U_m}{U_0}=\frac{R_2}{R_1+R_2}.$$

Очевидно, что

$$\beta^n+\beta^m=1,\ \beta<1.$$

Решим это уравнение графически. Для этого построим графики зависимости $\beta^n(\beta)$ и $1-\beta^m(\beta)$ (рис. 7). Точка пересечения графиков даст значение для β, а значит и для C_x:

$$C_x=C_0\frac{\beta}{1-\beta}.$$

И наконец, самое лучшее решение предложил *В. Петров* (Москва). Сначала неизвестный кон-

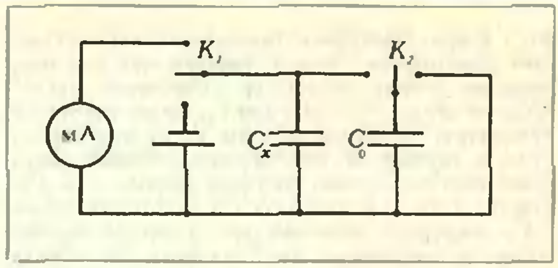


Рис. 4.

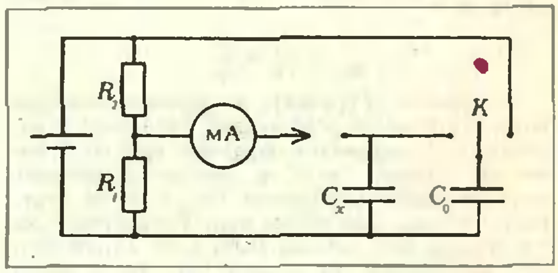


Рис. 5.

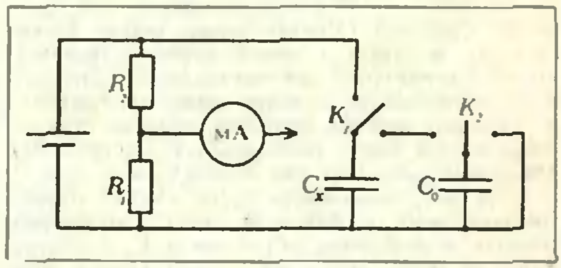


Рис. 6.

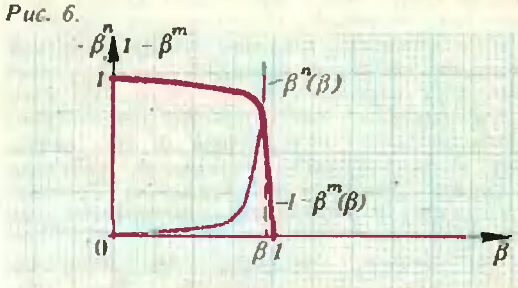


Рис. 7.

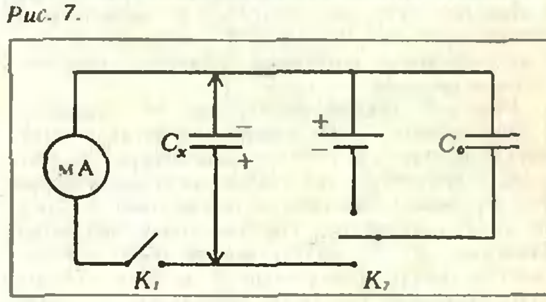
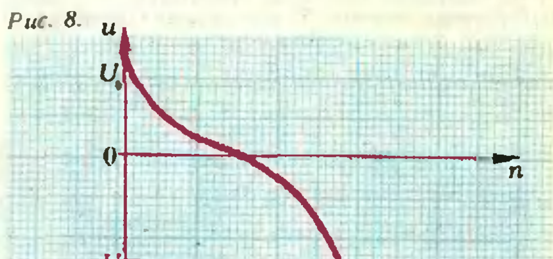


Рис. 8.



подключением к нему конденсатора с емкостью C_0, заряженного до напряжения $-U_0$ (рис. 8). При достаточно большом числе переключений неизвестный конденсатор может перезарядиться до напряжения $-U_0$ (рис. 9). Полная разрядка конденсатора ($U=0$) фиксируется в тот момент, когда при замыкании ключа K_1 ток через миллиамперметр не идет. Пусть к этому моменту было совершено n переключений. Если вначале на конденсаторе был заряд Q и после каждого переключения заряд изменяется на $\Delta Q_{ср}$, то

$$n=\frac{Q}{\Delta Q_{ср}}=\frac{C_xU_0}{C_0U_0+C_0U_0/2},$$

откуда получаем

$$C_x=\frac{3}{2}nC_0.$$

Этот метод дает погрешность измерений меньше 5 %.

Задание 2. *Исследуйте экспериментально колебания груза, подвешенного на двух нитях (маятник с бифилярным подвесом), при постоянном угле γ (рис. 10): а) найдите параметр, однозначно определяющий период колебаний этого груза, путем сравнения с колебаниями математического маятника (груза на длинной нити); б) определите зависимость периода колебаний груза от найденного параметра.*

Оборудование: маятник с бифилярным подвесом, математический маятник, линейка и миллиметровая бумага для построения графиков.

Изменяя по очереди различные параметры (l_1, l_2, d) бифилярного маятника и добиваясь каждый раз синхронного колебания бифилярного и математического маятников, можно заметить, что длина l математического маятника совпадает с отрезком L вертикали, проведенной из груза до подвеса (см. рис. 10). Серия таких опытов показывает, что параметр L однозначно определяет период колебаний бифилярного подвеса.

Затем нужно было экспериментально найти зависимость периода T колебаний бифилярного маятника от параметра L. Поскольку ни часов, ни секундомера не было, в качестве эталона времени следовало использовать математический маятник. Не изменяя длины математического маятника ($T_0=\text{const}$), измерялся период колебаний бифилярного маятника при разных значениях L в единицах T_0, для чего при каждом значении L подсчитывалось число колебаний N_0 математического маятника за некоторый промежуток времени и число ΔN полных совпадений состояний колебаний обоих маятников за это время:

$$\frac{T}{T_0}=\frac{\nu_0}{\nu}=\frac{\nu_0 t}{\nu t}=\frac{N_0}{N}=\frac{N_0}{N_0\pm\Delta N}.$$

Построив графики зависимости T/T_0 от L и $(T/T_0)^2$ от L, можно было убедиться в том, что $T\sim\sqrt{L}$.

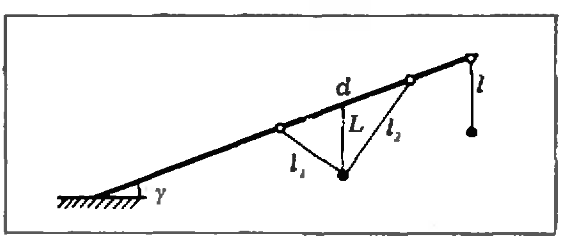


Рис. 10.

За эту задачу максимальное число баллов получили *В. Барзыкин* (п. Черноголовка Московской обл.), *Г. Григорьев* (Киев), *А. Севастьянов* (Северодвинск), *Л. Фельдман* (Саратов), *Д. Ян* (Ереван).

10 класс

Задание 1. *Определите отношения масс грузов и жесткостей пружин.*

Оборудование: два разных груза, две разные пружины, штатив.

Поскольку в данной работе не предполагалось использование часов и линейки, нужно было частоту собственных колебаний одного груза, подвешенного на одной пружине, использовать в качестве эталона для определения частоты собственных колебаний второго груза, подвешенного на второй пружине:

$$\frac{\nu_{11}}{\nu_{22}}=\frac{N_{11}}{N_{22}}=\sqrt{\frac{k_1}{k_2}\frac{m_2}{m_1}},$$

где k_1 и k_2 — жесткости пружин, m_1 и m_2 — массы грузов, N_{11} и N_{22} — число колебаний первой и второй колебательных систем за одно и то же время t (первое число в индексе показывает номер пружины, второе — номер груза).

Для нахождения искомых отношений k_1/k_2 и m_1/m_2 необходимо еще одно уравнение. Его можно получить, поменяв грузы местами и повторив опыт:

$$\frac{\nu_{12}}{\nu_{21}}=\frac{N_{12}}{N_{21}}=\sqrt{\frac{k_1}{k_2}\frac{m_1}{m_2}}.$$

Из полученных выражений следует:

$$\frac{k_1}{k_2}=\frac{N_{11}N_{12}}{N_{22}N_{21}},\quad \frac{m_1}{m_2}=\frac{N_{12}N_{22}}{N_{21}N_{11}}.$$

Подсчитав число колебаний одной системы N_{11} (N_{12}) и число ΔN_1 (ΔN_2) совпадений фаз колебаний обеих систем, получаем расчетные формулы:

$$\frac{k_1}{k_2}=\frac{N_{11}N_{12}}{(N_{11}+\Delta N_1)(N_{12}+\Delta N_2)},$$

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{N_{12}(N_{11}+\Delta N_1)}{(N_{12}+\Delta N_2)N_{11}},$$

где ΔN_1 и ΔN_2 равны ±1, ±2, ±3, ... Выбор знака «+» или «−» определяется из учета опережения или отставания фазы второй системы от первой на $\pm2\pi$, $\pm4\pi$, $\pm6\pi$, ...

Лучшие решения представили *А. Алексеев* (Ленинград), *А. Дешковский* (Барановичи), *В. Карольник* (Алма-Ата), *И. Курников* (Гатчина).

Задание 2. *Определите экспериментально положение главных фокусов оптической системы двух линз $Л_1$ и $Л_2$, расположенных на расстоянии $L=10$ см друг от друга. Проверьте для этой системы применимость формулы Ньютона $x_1x_2=F^2$, где x_1 — расстояние от предмета до переднего фокуса, x_2 — расстояние от заднего фокуса до изображения.*

Оборудование: собирающая линза $Л_1$, рассеивающая линза $Л_2$, вспомогательная собирающая линза Л, батарейка, лампочка, экран, линейка, лупа для рассматривания изображений, миллиметровая бумага для построения графиков.

Положение главных фокусов оптической системы можно найти, направив параллельный пучок света вдоль главной оптической оси системы. Для этого нить лампочки устанавливается в главном фокусе вспомогательной линзы.

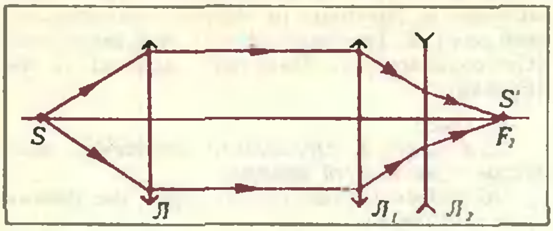


Рис. 11.

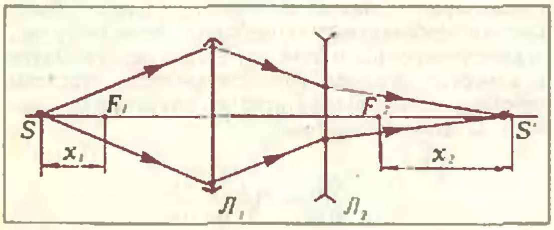


Рис. 12.

Проверка параллельности пучка света проводится с помощью измерения диаметра пятна на экране при перемещении последнего вдоль пучка.

Расположив данную систему двух линз и вспомогательную линзу так, чтобы их главные оптические оси совпали, находим задний фокус F_2 оптической системы — место получения изображения на экране нити лампочки (рис. 11). Направив параллельный пучок света с другой стороны системы, определяем положение переднего фокуса F_1. Расстояния от рассеивающей линзы до заднего фокуса и от собирающей линзы до переднего фокуса измеряются с помощью линейки.

Для проверки формулы Ньютона вспомогательная линза удаляется, и нить лампы устанавливается на главной оптической оси системы на разных расстояниях x_1 от переднего фокуса (рис. 12). Перемещая экран, получают на нем четкое изображение нити для каждого опыта и измеряют расстояние x_2 от заднего фокуса до экрана. По измеренным парам значений x_1 и x_2 удобно построить график зависимости произведения x_1x_2 от x_1, или x_2 от $1/x_1$ или $\lg x_2$ от $\lg x_1$ и убедиться в том, что он представляет собой прямую линию.

Максимальное количество баллов за задачу получили *А. Андреев* (Боровичи), *А. Коршак* (Киев), *Д. Макаров* (п. Черноголовка Московской обл.), *А. Межлумян* (Ереван), *К. Мусаелян* (Ереван), *Е. Соколов* (Дятьково).

Призеры XVIII Всесоюзной олимпиады школьников

Математика

Дипломы I степени

по 8 классам получили

Бендорфа К. (Рига, с. ш. № 1),
Вайсбурд М. (Томск, с. ш. № 6),
Гаущенко Г. (Запорожье, с. ш. № 91),
Калинин Г. (Ленинград, с. ш. № 308),
Коктс Г. (Рига, с. ш. № 1),
Лунин А. (Москва, с. ш. № 57),
Порошин В. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Петрунин А. (Ленинград, с. ш. № 470),
Рачинский Д. (Харьков, с. ш. № 27);

по 9 классам

Бондаренко О. (Киев, ФМШ № 2 при КГУ),
Коротков А. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Леонтьева О. (Ленинград, с. ш. № 239);

по 10 классам —

Астрелин А. (Новосибирск, с. ш. № 119),
Назаров Ф. (Ленинград, с. ш. № 239),
Оридорога Л. (Донецк, с. ш. № 64),
Струков С. (Воронеж, с. ш. № 85).

Диплом II степени

по 8 классам получили

Борисенко А. (Харьков, с. ш. № 27),
Борисов Л. (Минск, с. ш. № 19),
Кярас С. (Молетай, с. ш. № 2),
Судаков В. (Тбилиси, ФМШ им. Комарова),
Чусталу Т. (Таллин, с. ш. № 44),
Фролкин М. (Долгопрудный, с. ш. № 10),
Хапочкин Ю. (Брянск, с. ш. № 3);

по 9 классам —

Аршакян Н. (Аштарак, с. ш. № 3),
Басов О. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Бибин Д. (Витебск, с. ш. № 31),
Иванов Л. (Саратов, с. ш. № 13),
Михайлов В. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Маслов А. (Москва, с. ш. № 57),
Малеванец А. (Киев, ФМШ № 2 при КГУ),
Нажмитдинов А. (Наманган, с. ш. № 7),
Пенгус М. (Таллин, с. ш. № 1),
Реджюнас М. (Вильнюс, с. ш. № 23),
Скуиныш А. (Рига, с. ш. № 1),
Святодух И. (Красноармейск Донецкой обл., с. ш. № 3),
Роглер М. (Калинин, с. ш. № 17);

по 10 классам —

Абакумов Е. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Алексеев М. (Москва, с. ш. № 2),
Богомольная А. (Ленинград, с. ш. № 239),
Викста Ю. (Алуксне, с. ш. № 1),
Гараев М. (Физули, с. ш. № 2),
Грунумане Д. (Рига, с. ш. № 1),
Дуйсекулов М. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Игнатов К. (Москва, с. ш. № 2),
Козлов С. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Лев М. (Свердловск, с. ш. № 130),
Мисник С. (Воронеж, с. ш. № 62),
Седола Снидзе (Рига, с. ш. № 1),
Хрычиков В. (Севастополь, с. ш. № 24),
Этингоф П. (Киев, с. ш. № 145).

Диплом III степени

по 8 классам получили

Галиндухин Е. (Петропавловск, с. ш. № 1),
Газарян Т. (Ереван, ФМШ при ЕГУ),
Крестьянников А. (Славгород Алтайского кр., с. ш. № 10),
Минеев И. (Салехард, с. ш. № 2),

Парьев В. (п. Красногвардейск Белгородской обл., Красногвардейская с. ш.),
Прохоров М. (Полтава, с. ш. № 28),
Слепухин А. (Калуга, с. ш. № 5),
Тимкин В. (Новосибирск, с. ш. № 110),
Усатюк В. (Владивосток, с. ш. № 23),
Ферлегер С. (Ташкент, с. ш. № 110);

по 9 классам —
Алексеев Р. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Биргер А. (Иваново, с. ш. № 6),
Гольденберг И. (Мурманск, с. ш. № 8),
Гончаренко Ю. (Винница, с. ш. № 15),
Земцов П. (Новосибирск, с. ш. № 25),
Ковшов Д. (Арзамас, с. ш. № 15),
Ойхберг Т. (Ленинград, с. ш. № 239),
Самойлов Д. (Минск, с. ш. № 30),
Сливинский М. (Люберцы, с. ш. № 115),
Филиппов С. (Белорецк, с. ш. № 14),
Ясько Р. (Киев, с. ш. № 145);

по 10 классам —
Бураго А. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Гочев Г. (Дубна, с. ш. № 9),
Кабанов А. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Кравченко А. (Харьков, с. ш. № 122),
Кривоносов А. (Свердловск, с. ш. № 37),
Курганов Д. (Туапсе, с. ш. № 6),
Маргвелашвили Г. (Кутаиси, ФМШ),
Михайлюк В. (Киев, ФМШ № 2 при КГУ),
Николаев В. (Хабаровск, с. ш. № 2),
Румянцев И. (Ангарск, с. ш. № 10),
Филиппов В. (Караганда, с. ш. № 63).

Физика

Дипломы I степени

по 8 классам получили
Свердлов М. (Минск, с. ш. № 50);
по 9 классам —
Барзыкин В. (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82),
Григорьев Г. (Киев, ФМШ № 2 при КГУ),
Жестков Ю. (Алма-Ата, РФМШ),
Линдунен И. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Севастьянов А. (Северодвинск, с. ш. № 17);

по 10 классам —
Алексеев А. (Ленинград, с. ш. № 239),
Гринберг М. (Красноярск, с. ш. № 42),
Закревский Л. (Минск, с. ш. № 50),
Курников И. (Гатчина, с. ш. № 1),
Межлумян А. (Ереван, с. ш. № 55),
Мусаелян К. (Ереван, с. ш. № 55),
Ярунин Н. (Павлово, с. ш. № 1).

Дипломы II степени

по 8 классам получили
Волков О. (Горький, с. ш. № 23),
Гущин А. (Ленинск Каз. ССР, с. ш. № 30),
Матулёнис И. (Вильнюс, с. ш. № 7),
Матыцин А. (Москва, с. ш. № 91),
Мягчилов С. (Одесса, с. ш. № 16),
Николаишвили Г. (Тбилиси, ФМШ им. Комарова),
Эрда Ю. (Таллин, с. ш. № 1);

по 9 классам —
Иваненко Т. (Киев, с. ш. № 145),
Климачев А. (Минск, с. ш. № 116),
Михеев А. (Кимры, с. ш. № 13),
Петров В. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Тепляев А. (Ленинград, с. ш. № 239),
Фельдман Л. (Саратов, с. ш. № 13),
Черп О. (Минск, с. ш. № 50),
Ян Д. (Ереван, ФМШ);

по 10 классам —
Абанов А. (Красноярск, с. ш. № 170),
Бондаренко И. (Рига, с. ш. № 79),
Дешковский А. (Барановичи, с. ш. № 11),
Король А. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Купцов Д. (Москва, с. ш. № 4),
Сайко Г. (Киев, с. ш. № 145),
Соколов Е. (Дятьково, с. ш. № 2).

Дипломы III степени

по 8 классам получили
Бакарян Т. (Ереван, ФМШ),
Агазарян Н. (Ереван, ФМШ),
Беренгольц А. (Кишинев, с. ш. № 3),
Боюр Р. (Тольятти, с. ш. № 28),
Зырянов И. (Братск, с. ш. № 32),
Лебедев Д. (Гатчина, с. ш. № 3),
Санников А. (Ленинград, с. ш. № 344),
Солодовников С. (Навои, с. ш. № 18),
Суконников Н. (Винница, с. ш. № 17),
Чунаев А. (Волгоград, с. ш. № 92);

по 9 классам —
Зеленюк А. (Здолбунов, с. ш. № 6),
Каледин Д. (Москва, с. ш. № 91),
Кирюхин О. (Киев, ФМШ № 2 при КГУ),
Меньков В. (Мончегорск, с. ш. № 3),
Мотовилов М. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Рассолов В. (Кишинев, с. ш. № 13),
Якивчик А. (Москва, с. ш. № 91);

по 10 классам —
Баранаускас Г. (Шяуляй, с. ш. № 5),
Макаров Д. (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82),
Орлов С. (Москва, с. ш. № 842),
Потеряйко И. (Киев, ФМШ № 2 при КГУ).

Встреча с читателями

В текущем году в Московском университете проходили ставшие уже традиционными курсы повышения квалификации учителей средних школ. 12 июня учителя математики, слушатели этих курсов, встретились с членами редколлегии журнала «Квант».

На встречу с учителями, которую вел заместитель главного редактора журнала «Квант» Ю. П. Соловьев, пришли члены редколлегии Н. Б. Васильев, Н. Х. Розов, заведующий отделом математики журнала А. Б. Сосинский. В своих выступлениях они рассказали об истории, работе и планах журнала, задачах, поставленных перед журналом предстоящей реформой общеобразовательной и профессиональной школы.

В развернувшемся обсуждении активное участие приняли многие из присутствовавших учителей. Они отметили квалифицированную помощь, которую журнал оказывает им при проведении факультативов и внеклассных занятий, значение «Кванта» для воспитания интереса учащихся к физике и математике. В выступлениях учителей прозвучали и критические замечания в адрес редколлегии журнала, были высказаны конкретные советы и предложения по его дальнейшему улучшению.

Н. Р.

Об одном способе решения некоторых уравнений
2. 4. 3. 4.

Избранные школьные задачи

1. а) Докажем (рис. 1), что треугольники BNK и ABC подобны. Угол B треугольника ABC для них общий. Кроме того, из прямоугольных треугольников BCN и BAK получаем, что $BK/AB=BN/BC=\cos\angle B$. Отсюда и следует доказываемое подобие, причем коэффициент подобия равен $\cos\angle B$. Аналогично рассматриваются и другие пары треугольников. б) Из подобия треугольников BNK и ABC вытекает, что $\angle BNK=\angle BCA$. Аналогично $\angle ANM=\angle BCA$. Поэтому $\angle MNC=\angle KNC=90^\circ-\angle C$. Аналогично показывается, что AK и BM — биссектрисы углов NKM и NMK.

2. Ответ. а) 10^{15}; б) $\dfrac{x(1-(n+1)x^n+nx^{n+1})}{(1-x)^2}$ при $x\neq 1$ и $\dfrac{n(n+1)}{2}$ при $x=1$. Решение. а) Преобразуем произведение Π_{15} первых пятнадцати членов прогрессии (a — первый член, q — знаменатель прогрессии):

$$\Pi_{15}=a^{15}\cdot q^{1+2+3+\ldots+14}=(aq^7)^{15}=a_8^{15}=10^{15}.$$

б) Обозначим искомую сумму через S. Тогда при $x\neq 1$

$$Sx=x^2+2x^3+3x^4+4x^5+\ldots+nx^{n+1},$$

поэтому $S-Sx=x+x^2+x^3+x^4+\ldots+x^n-nx^{n+1}=$ $=\dfrac{x(1-x^n)}{1-x}-nx^{n+1}=\dfrac{x(1-(n+1)x^n+nx^{n+1})}{1-x}$.

3. Пусть a, c, x и y — длины сторон BC, AB, BN и BM соответственно, β — величина угла ABC (рис. 2). Тогда $S_{ABC}=\dfrac{ac\sin\beta}{2}$, $S_{MBN}=\dfrac{xy\sin\beta}{2}$, поэтому $S_{MBN}:S_{ABC}=\dfrac{x}{a}\cdot\dfrac{y}{c}$.

4. Ответ. 0. Указание. Условие $S_m=S_n$ эквивалентно условию $2a_1=(1-m-n)d$, откуда $a_1+a_{m+n}=0$ и $S_{m+n}=\dfrac{a_1+a_{m+n}}{2}(m+n)=0$.

5. а) Треугольники AED и CEB подобны (у них равны вертикальные углы при вершине E, а $\angle CBE=\angle EDA$ как вписанные в окружность углы, опирающиеся на одну и ту же дугу AC (рис. 3).
б) Треугольники EAB и EAC подобны (при доказательстве этого факта используется то, что угол, заключенный между касательной и хордой окружности, проходящими через одну ее точку, измеряется половиной ее дуги, заключенной между его сторонами, рис. 4).
в) Во всех случаях расположения точки E надо провести через нее диаметр окружности и воспользоваться пунктами а) или б) этой задачи.

6. Ответ. Нет. Указание. Пусть $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Тогда для любых целых b и c ($b\neq c$) целое число $P(b)-P(c)$ делится на число $b-c$. (Это следует, например, из формулы $b^k-c^k=(b-c)(b^{k-1}+$ $+b^{k-2}c+b^{k-3}c^2+\ldots+bc^{k-2}+c^{k-1})$, верной для любого натурального k). Если бы существовал многочлен, удовлетворяющий условиям задачи,

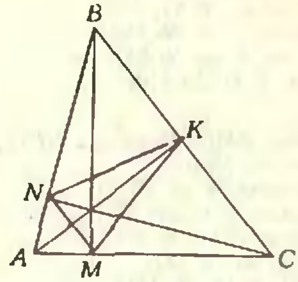


Рис. 1.

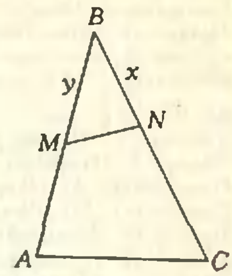


Рис. 2.

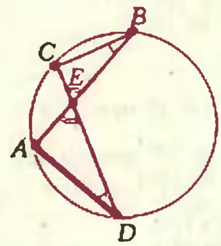


Рис. 3.

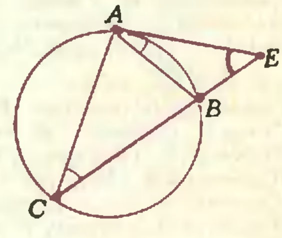


Рис. 4.

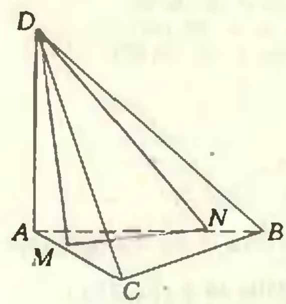


Рис. 5.

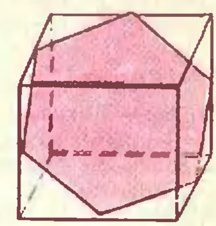


Рис. 6.

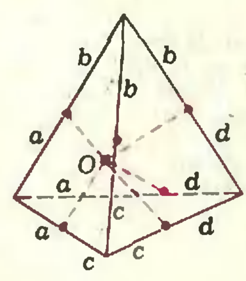


Рис. 7.

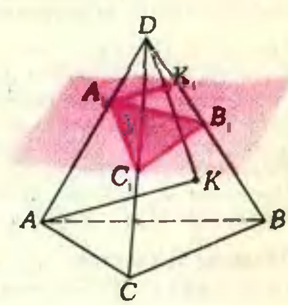


Рис. 8.

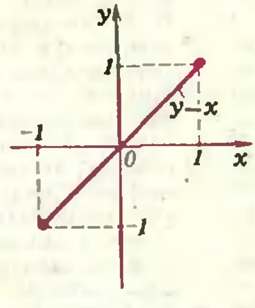


Рис. 9а.

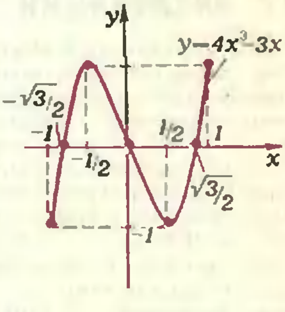


Рис. 9б.

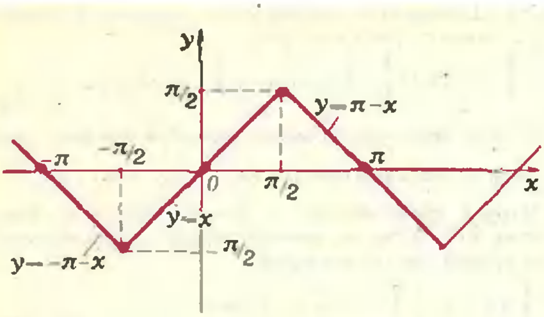


Рис. 9в.

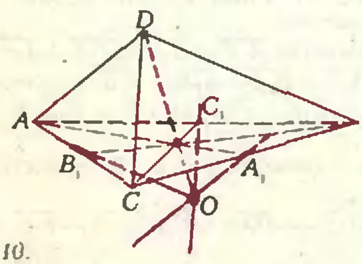


Рис. 10.

то число $P(11)-P(7)=13-11=2$ делилось бы на число $11-7=4$.

7. Могут. Приведем пример. Для этого через вершину D треугольной пирамиды $ABCD$, у которой ребро DA перпендикулярно основанию, проведем плоскость DMN (рис. 5). Пирамида $DNBCM$, очевидно, удовлетворяет условию.

8. а) Верно. б) Может. Пример: $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$. в) Предположим, что первое число рационально. Тогда оно является периодической десятичной дробью. Пусть период этой дроби содержит k цифр, а перед первым периодом имеется n цифр. Поскольку среди натуральных чисел имеется число, записываемое единицей с m $(m>n+k)$ нулями, получается, что период должен состоять из k нулей, что неверно. Получили противоречие.

Предположим, что $\operatorname{tg} 5°$ — рациональное число. В силу формулы $\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ (в частности, $\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$) имеем, что числа $\operatorname{tg} 10°$, $\operatorname{tg} 20°$ и $\operatorname{tg} 30°$ — числа рациональные, но $\operatorname{tg} 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$ — иррациональное число. Получили противоречие.

9. Ответ. 3, 4, 6. Решение. Примеры таких сечений привести легко (вершины шестиугольника — середины соответствующих ребер, рис. 6). Докажем, что иных случаев быть не может. Во-первых, поскольку у куба 6 граней, то больше 6 сторон в сечении его плоскостью не бывает. Во-вторых, если предположить, что в сечении получается пятиугольник, то хотя бы две его стороны должны лежать в параллельных гранях куба, и, значит, эти стороны параллельны; но в правильном пятиугольнике нет параллельных сторон.

10. а) Умножьте обе части доказываемого равенства на $2\sin\frac{\pi}{5}$. б) Ответ. $\frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ при $\alpha\neq 2\pi n$, $n\in Z$; 0 при $\alpha=2\pi n$, $n\in Z$. Указание. Идея решения та же, что и в пункте а): умножьте и разделите данную сумму на $\sin(\alpha/2)$ и примените формулу $\sin\beta - \sin\gamma = \frac{1}{2}(\cos(\beta-\gamma)-\cos(\beta+\gamma))$.

в) $\frac{n\sin\alpha-\sin n\alpha\cos(n+1)\alpha}{2\sin\alpha}$ при $\alpha\neq\pi n$, $n\in Z$; 0 при $\alpha=\pi n$, $n\in Z$. Указание. Для решения сначала преобразуйте данную сумму с помощью формулы $\sin^2\varphi=(1-\cos 2\varphi)/2$, а затем, умножив и разделив ее на $\sin\alpha$, примените формулу $\sin\beta\cos\gamma=\frac{1}{2}(\sin(\beta+\gamma)+\sin(\beta-\gamma))$.

11. Отрезки касательных к шару, проведенных из одной точки, равны. Пусть a, b, c, d — длины этих отрезков для всех вершин тетраэдра соответственно (рис. 7). Тогда для каждой пары скрещивающихся ребер сумма их длин равна $a+b+c+d$.

12. Пусть $ABCD$ — данный тетраэдр и $A_1B_1C_1$ — его сечение, причем $\frac{|A_1D|}{|AD|}=\frac{a}{b}$, $\frac{|B_1D|}{|BD|}=\frac{c}{d}$, $\frac{|C_1D|}{|CD|}=\frac{e}{f}$ (рис. 8). Будем считать грани BCD и B_1C_1D основаниями тетраэдров $ABCD$ и $A_1B_1C_1D$ соответственно. Пусть AK — высота тетраэдра $ABCD$, опущенная из его вершины A, тогда параллельный этой высоте отрезок A_1K_1 будет высотой тетраэдра $A_1B_1C_1D$. Отношение объемов тетраэдров равно $\frac{S_{B_1C_1D}\cdot|A_1K_1|}{S_{BCD}\cdot|AK|}$. Но $S_{B_1C_1D}:S_{BCD}=\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}$ (см. задачу № 3), а из подобия треугольников AKD и A_1K_1D вытекает, что $|A_1K_1|:|AK|=|A_1D|:|AD|$. Отсюда получается утверждение задачи.

13. а) $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=\cos\beta+\cos\gamma-\cos(\beta+\gamma)=2\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}+1-2\cos^2\frac{\beta+\gamma}{2}=$

$$=1+\frac{1}{2}\cos^2\frac{\beta-\gamma}{2}-2\left(\cos\frac{\beta+\gamma}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\right)^2\leqslant$$

$$\leqslant 1+\frac{1}{2}\cos^2\frac{\beta-\gamma}{2}\leqslant\frac{3}{2}.$$

Равенство достигается только при $\alpha=\beta=\gamma=\pi/3$.

б) Поскольку

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sin\frac{(\pi-(\beta+\gamma))}{2}=\cos\frac{\beta+\gamma}{2},$$

левую часть неравенства можно преобразовать к виду

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\cos^2\frac{\beta-\gamma}{2}-\left(\cos\frac{\beta+\gamma}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\right)^2\right),$$

откуда аналогично пункту а) можно получить искомый результат.

14. Графики изображены на рисунках 9а—9в.

15. Пусть плоские углы при вершине D тетраэдра $ABCD$ прямые (рис. 10). Обозначим центр описанного около тетраэдра шара через O, а середину ребра BC — через A_1. Докажем, что прямая OD пересекается с медианой AA_1 основания ABC. Из условия следует, что ребро AD перпендикулярно плоскости боковой грани BCD. Но точка O одинаково удалена от вершин B, C и D этой грани и поэтому лежит на перпендикуляре к этой грани, проведенном через центр A_1 окружности, описанной около прямоугольного треугольника BCD. Итак, отрезки AD и A_1O параллельны и поэтому образуют плоскость, в которой лежат непараллельные отрезки OD и A_1A. Таким образом, отрезок OD пересекается с медианой A_1A грани ABC. Точно также можно доказать, что отрезок OD пересекается и с другими медианами треугольника ABC. Отсюда вытекает, что отрезок OD содержит точку пересечения этих медиан.

XVIII Всесоюзная олимпиада по математике

Первый день

8.1. а) Если натуральное число n представимо в виде произведения n целых чисел и не делится на 4, то среди n сомножителей самое большее один является четным числом. Если число сомножителей n четно, то один из них является четным числом, а другие $n-1$ являются числами нечетными. Если же число сомножителей n нечетно, то все n сомножителей являются нечетными числами. В обоих случаях сумма всех n сомножителей является нечетным числом и не может равняться нулю. Получили противоречие.

б) Пусть $n=4k$. Тогда, если число k нечетное, то $n=2\cdot(-2k)\cdot 1^{3k-2}\cdot(-1)^k$; если же число k четное, то $n=(-2)\cdot(-2k)\cdot 1^{3k}\cdot(-1)^{k-2}$.

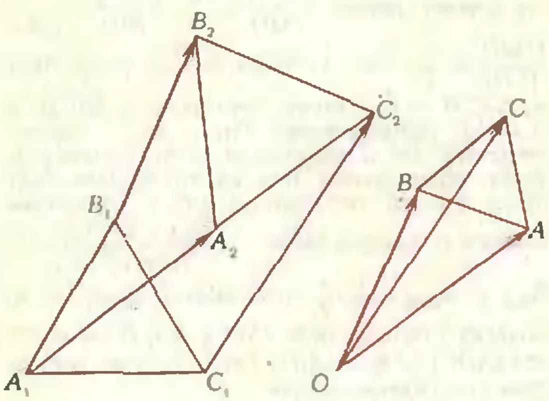


Рис. 11.

Рис. 12.

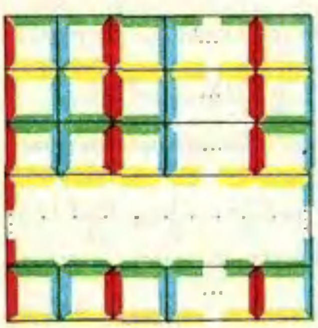


Рис. 13.

Рис. 14.

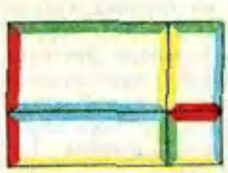


Рис. 15.

8.2. Данное неравенство после очевидных преобразований принимает вид

$$\left[\frac{1}{2}(a+b)\right]\cdot\left(a+b+\frac{1}{2}\right)\geqslant\sqrt{ab}\cdot(\sqrt{a}+\sqrt{b}). \qquad (1)$$

В силу неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим, $\frac{1}{2}(a+b)\geqslant\sqrt{ab}$.

Второй сомножитель в левой части неравенства (1) также не меньше второго сомножителя в правой части, поскольку

$$\left(a+b+\frac{1}{2}\right)-(\sqrt{a}+\sqrt{b})=$$
$$=\left(\sqrt{a}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{b}-\frac{1}{2}\right)^2\geqslant 0.$$

Неравенство (1), а вместе с ним и данное неравенство, доказано.

8.3. Из равенства $\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{B_1B_2}=\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2B_2}$ следует $-\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{B_1B_2}=\overrightarrow{A_2B_2}-\overrightarrow{A_1B_1}$. Аналогично, $\overrightarrow{C_1A_1}+\overrightarrow{A_1A_2}=\overrightarrow{C_1C_2}-\overrightarrow{C_2A_2}$ влечет $-\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{C_1C_2}=\overrightarrow{A_2C_2}-\overrightarrow{A_1C_1}$.

Используя условие задачи и эти равенства, получаем:

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{B_1B_2}=$$
$$=-\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_2B_2},$$
$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{C_1C_2}=$$
$$=-\overrightarrow{A_1C_1}+\overrightarrow{A_2C_2}.$$

Будем через $\vec{a}'$ обозначать вектор, получающийся *из вектора $\vec{a}$ поворотом на 60° против часовой* стрелки. Ясно, что $(k\vec{a})'=k\vec{a}'$ и $(\vec{a}+\vec{b})'=\vec{a}'+\vec{b}'$. Так как (рис. 11) $\overrightarrow{A_1B_1}=(\overrightarrow{A_1C_1})'$, $\overrightarrow{A_2B_2}=(\overrightarrow{A_2C_2})'$, получаем, $(\overrightarrow{AC})'=(-\overrightarrow{A_1C_1}+\overrightarrow{A_2C_2})'=-(\overrightarrow{A_1C_1})'+(\overrightarrow{A_2C_2})'=-\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_2B_2}=\overrightarrow{AB}$. Мы видим, что вектор $\overrightarrow{AB}$ получается из вектора $\overrightarrow{AC}$ поворотом на 60°. Это и означает, что ABC — равносторонний треугольник.

8.4. Прямоугольник размера $m\times n$, удовлетворяющий условиям задачи, можно склеить, если числа m и n имеют одинаковую четность, и нельзя склеить в противном случае.

1-й случай. m и n нечетны. Тогда мы можем склеить прямоугольник-строчку размера $1\times n$ — с требуемыми свойствами (рис. 12), а затем из таких строчек тем же способом склеить искомый прямоугольник размера $m\times n$ (рис. 13).

2-й случай. m и n четны. Рассмотрим прямоугольники с нечетными длинами сторон размеров $(m-1)\times(n-1)$, $1\times(n-1)$, $(m-1)\times 1$ и 1×1 соответственно, изображенные на рисунке 14 (как доказано, такие прямоугольники склеить можно). Из этих прямоугольников склеиваем искомый прямоугольник размера $m\times n$ так, как показано на рисунке 15.

3-й случай. Числа m и n разной четности, для определенности, m — четно, n — нечетно. Допустим, что мы склеили прямоугольник размера $m\times n$, стороны которого окрашены в различные цвета. Рассмотрим одну из сторон прямоугольника, длина которой нечетна. Пусть она, например, красного цвета. Подсчитаем общее число красных сторон у использованных плиточек. На границе прямоугольника их n, а внутри их четное число, так как к каждой красной стороне одной плиточки примыкает красная сторона другой плиточки. Следовательно, общее число красных сторон нечетно. Всего плиточек, очевидно, использовано ровно столько же, сколько имеется красных сторон, то есть нечетное число. С другой стороны, их число равно mn, то есть четно. Получили противоречие.

9.1. Первое решение. При всех действительных $x>0$, $y>0$ справедливы неравенства $x\leqslant\max\{x, y\}$, $y\leqslant\max\{x, y\}$. Поэтому при всех действительных α

$$x^{\sin^2\alpha}\cdot y^{\cos^2\alpha}\leqslant(\max\{x, y\})^{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=$$
$$=\max\{x, y\}<x+y.$$

Второе решение. Так как $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$, то $x^{\sin^2\alpha}\cdot y^{\cos^2\alpha}=\left(\frac{x}{y}\right)^{\sin^2\alpha}\cdot y$, и поэтому данное неравенство равносильно неравенству $\left(\frac{x}{y}\right)^{\sin^2\alpha}<\frac{x}{y}+1$, или $t^{\sin^2\alpha}<t+1$, где $t=\frac{x}{y}>0$, $0\leqslant\sin^2\alpha\leqslant1$. Если $0<t\leqslant1$, то $t^{\sin^2\alpha}\leqslant\leqslant1<t+1$. Если же $t>1$, то $t^{\sin^2\alpha}\leqslant t<t+1$, и неравенство также выполняется.

9.2. Не верно. Для того чтобы не проиграть, партнеру начинающего достаточно покрасить в зеленый цвет любые три попарно скрещивающиеся ребра. Действительно, при этом в каждой грани будет покрашено одно ребро, так что партнер начинающего добьется как минимум, ничьей. Значит, задача начинающего — своим первым ходом помешать партнеру покрасить три попарно скрещивающихся ребра. Для этого начинающий должен так выбрать три ребра куба, чтобы в каждую тройку попарно скрещивающихся ребер входило, по крайней мере, одно из выбранных им ребер. Это, однако, сделать нельзя. В самом деле, всего имеется 8 таких троек: каждое из четырех ребер фиксированной грани куба порождает две тройки. Эти 8 троек различны, и в любую тройку попарно скрещивающихся ребер входит одно ребро из данной фиксированной грани. В то же время, покрасив 3 ребра, можно «испортить» самое большее 6 троек (две тройки могут иметь общее ребро, а три — не могут), причем для того чтобы «испортить» 6 троек, надо покрасить какие-нибудь три попарно параллельных ребра.

9.3. См. решение М875 в «Кванте» № 10.

9.4. Ясно, что точки A_2, B_2, C_2 являются серединами дуг B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 соответственно. Таким образом, мы приходим к следующей задаче: в окружность вписан шестиугольник $A_1C_2B_1A_2C_1B_2$ (рис. 16) такой, что имеют место равенства дуг $A_1C_2=C_2B_1$, $B_1A_2=A_2C_1$, $C_1B_2=B_2A_1$. Требуется доказать, что главные диагонали этого шестиугольника A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке. Но эти главные диагонали являются биссектрисами треугольника $A_1B_1C_1$. Действительно, вписанные углы $\angle C_1A_1A_2$ и $\angle A_2A_1B_1$ опираются на равные дуги, то есть равны друг другу, что и означает, что A_2A_1 является биссектрисой угла $\angle C_1A_1B_1$. Аналогично доказывается, что B_1B_2 и C_1C_2 также являются биссектрисами соответствующих углов. Но биссектрисы любого треугольника пересекаются в одной точке, и требуемое доказано.

10.1. Ответ: при $m=n=0$. Решение см. М874 а).

10.2. Пусть даны числа (первая строка):

$$a_1<a_2<\ldots<a_m<a_{m+1}<\ldots<a_n.$$

Вторую строку образуют (различные!) числа

$$a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots, a_{k_m}, a_{k_{m+1}}, \ldots, a_{k_n},$$

а третью строку — числа

$$a_1+a_{k_1}, a_2+a_{k_2}, \ldots, a_m+a_{k_m},$$
$$a_{m+1}+a_{k_{m+1}}, \ldots, a_n+a_{k_n};$$

причем по условию задачи выполнены неравенства

$$a_1+a_{k_1}<a_2+a_{k_2}<\ldots<a_m+$$
$$+a_{k_m}<a_{m+1}+a_{k_{m+1}}<\ldots<a_n+a_{k_n}. \quad (2)$$

Покажем, что $a_1=a_{k_1}$. Пусть это будет не так, то есть $a\neq a_{k_1}$ (и, следовательно, $a_{k_1}>a_1$). Но тогда число a_1 стоит во второй строке на некотором m-ом месте, $m\geqslant2$, то есть $a_{k_m}=a_1$, а числа a_{k_1}, $a_{k_2}, \ldots, a_{k_{m-1}}$ не равны a_1.

Так как по условию задачи выполнены неравенства (2), получаем

$$a_1+a_{k_1}<a_m+a_{k_m}=a_m+a_1,$$
$$a_2+a_{k_2}<a_m+a_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m-1}+a_{k_{m-1}}<a_m+a_1.$$

Заменив в левых частях этих неравенств числа $a_2, a_3, \ldots, a_{m-1}$ на меньшее число a_1, получим неравенства

$$a_{k_2}<a_m, a_{k_3}<a_m, \ldots, a_{k_{m-1}}<a_m.$$

Кроме того, $a_1<a_m$, $a_{k_1}<a_m$. Следовательно, среди данных чисел мы нашли m различных чисел $a_1, a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots, a_{k_{m-1}}$, строго меньших числа a_m. Но таких чисел всего $m-1$ (это — числа $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$). Пришли к противоречию. Итак, $a_1=a_{k_1}$.

Отбрасывая теперь числа a_1, a_{k_1}, $a_1+a_{k_1}$ в первой, второй и третьей строках, мы аналогично можем доказать, что $a_2=a_{k_2}$. И так далее последовательно доказываем, что $a_3=a_{k_3}, \ldots, a_n=a_{n_k}$.

10.3. См. заметку Н. Б. Васильева «Восемь точек» в одном из следующих номеров.

10.4. Введем обозначения

$$A=x^2+xy+\frac{y^2}{3},\ B=\frac{y^2}{3}+z^2,$$
$$C=z^2+zx+x^2,\ D=xy+2yz+3zx.$$

Если (x, y, z) — решение данной системы уравнений, то $A=25$, $B=9$, $C=16$. Далее мы будем работать только с такой тройкой чисел (x, y, z) и соответствующими значениями A, B, C. Равенство $A=B+C$ приводит к равенству

$$xy=2z^2+zx=z(x+2z).$$

Отсюда

$$D=(xy+2yz)+3zx=y(x+2z)+3zx=$$
$$=y\cdot\frac{xy}{z}+3zx=\frac{3x}{z}\left(\frac{y^2}{3}+z^2\right)=\frac{27x}{z}.$$

С другой стороны, $D=xy+2yz+3zx=2z^2+zx+$

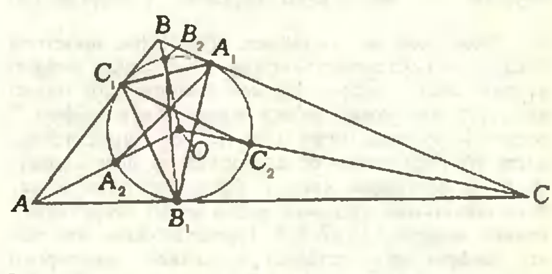


Рис. 16.

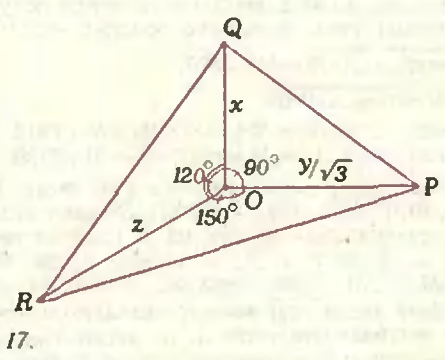


Рис. 17.

$+2yz+3zx=2z(2x+y+z)$, то есть $2x+y+z=D/2z=27x/2z^2$. Далее, $A-B+C=32=x(2x+y+z)=x\cdot D/2z=27x^2/2z^2$. Следовательно, $x/z=8/3\sqrt{3}$ (напомним, что $x>0$, $z>0$), и поэтому $D=27x/z=24\sqrt{3}$.

Замечание. Есть и другое решение, основанное на геометрической интерпретации A, B, C как квадратов сторон некоторых треугольников (рис. 17).

Второй день

8.5. Ответ: Да, верно. Решение см. М873.

8.6. Ответ: $\pi r^2+2pr-(pr^2/2R)$. Указание. При подсчете внешней части следа (πr^2+pr), воспользуйтесь тем, что составляющие ее секторы образуют круг. При подсчете внутренней части ($pr-(pr^2/2R)$) — соображениями гомотетичности.

8.7. Обозначим через k вес самой тяжелой из гирь, через S — число гирь веса 1. Заметим, что $S\geqslant k$. Действительно, у нас есть гиря веса k, S гирь веса 1 и еще $n-S$ гирь, вес каждой из которых не меньше 2. Поскольку вес всех гирь по условию равен $2n$, справедливо неравенство $2n\geqslant k+S+2(n-S)$, откуда $S\geqslant k$.

После того, как на весы положили первую гирю, разность между весами грузов на чашках стала равна k. Понятно, что и в дальнейшем вес более тяжелой чашки будет отличаться от веса более легкой чашки не более чем на k. В самом деле, на каждом следующем шаге мы кладем гирю на более легкую чашку. Если после этого она осталась более легкой, то разность весов на чашках уменьшилась. Если же после этого более легкая чашка стала более тяжелой, но новая разность между весами не превосходит веса положенной гири, а он не превосходит k.

Предположим, что мы положили на весы все гири, вес которых больше 1, и у нас остались S гирь веса 1. Так как S больше или равно разности весов на чашках, то, положив на весы некоторое количество гирь веса 1, мы приведем их в состояние равновесия. В этот момент общий вес гирь на весах будет выражаться четным числом, поэтому число оставшихся гирь веса 1 также будет четным. В дальнейшем мы должны будем класть их поочередно то на одну, то на другую чашку. Следовательно, в силу четности числа оставшихся гирь веса 1 в итоге весы окажутся в равновесии.

8.8. Очевидно, что в записи абсолютно простого числа не может встретиться ни одна четная цифра, а если число цифр в записи больше или равно двум, то не может также встретиться цифра 5 (если бы одна из цифр 0, 2, 4, 6, 8, 5 присутствовала, то, переставив ее на последнее место, получили бы составное число). Следовательно, в записи абсолютно простого числа могут встретиться только цифры 1, 3, 7 и 9. Предположим, что все эти цифры присутствуют в записи некоторого абсолютно простого числа. В таком случае, переставляя их, мы из данного числа можем получить следующие семь абсолютно простых чисел:

$M_1=\overline{a_1a_2...a_m1379}=M+1379$,

где $M=\overline{a_1a_2...a_m0000}$,

$M_2=M+3179$, $M_3=M+9137$, $M_4=M+7913$,
$M_5=M+1397$, $M_6=M+3197$, $M_7=M+7139$.

Это, однако, невозможно, так как числа 1379, 3179, 9137, 7913, 1397, 3197 и 7139 дают различные остатки при делении на 7 (соответственно 0, 1, 2, 3, 4, 5 и 6), и поэтому среди чисел M_1, M_2, ..., M_7 одно обязательно делится на 7.

9.5. Если число $\overline{x6y4}$ является квадратом некоторого натурального числа A, то число A является двузначным и оканчивается либо на 2, либо на 8,

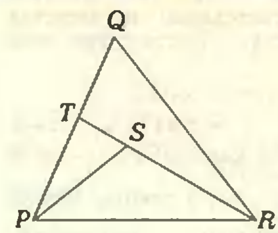


Рис. 18.

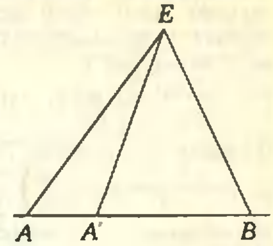


Рис. 19.

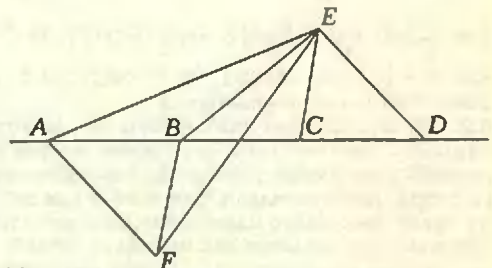


Рис. 20.

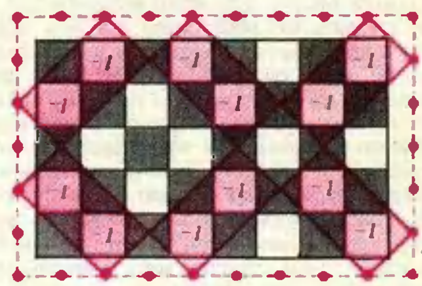


Рис. 21.

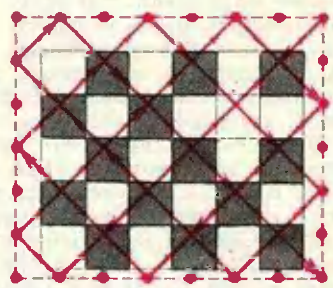


Рис. 22.

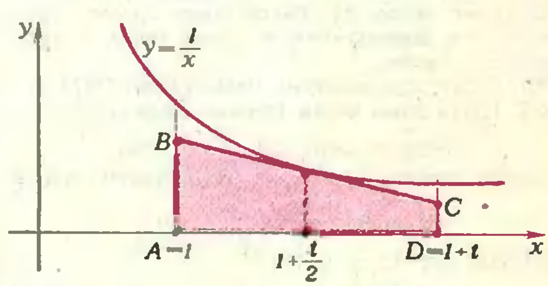


Рис. 23.

причем $A>40$. Всего существует 12 таких чисел: 42, 52, 62, 72, 82, 92, 48, 58, 68, 78, 88, 98. Легко проверить, что только квадраты чисел 68 и 98 имеют цифру 6 в третьем разряде:

$68^2=4624$, $98^2=9604$. Следовательно, либо $x=4$, $y=2$, либо $x=9$, $y=0$. В обоих случаях число

$$\overline{\underbrace{xxx\ldots x}_{n}6\underbrace{yyy\ldots y}_{n}4}$$

является квадратом при всех $n\geqslant 1$:

$$\overline{\underbrace{4\ldots4}_{n}6\underbrace{2\ldots2}_{n}4}=4\cdot10^{n+1}\cdot(10^n+\ldots+10+1)+$$

$$+2\cdot10^{n+1}+2\cdot(10^n+\ldots+10+1)+2=$$

$$=4\cdot10^{n+1}\cdot\frac{10^{n+1}-1}{9}+2\cdot10^{n+1}+2\cdot\frac{10^{n+1}-1}{9}+2$$

$$=\frac{4}{9}\cdot(10^{n+1}+2)^2=(6\underbrace{\ldots}_{n}68)^2;\ \overline{9\underbrace{\ldots}_{n}9\,6\,0\underbrace{\ldots}_{n}04}=$$

$$=(10^n-1)\cdot10^{n+2}+6\cdot10^{n+1}+4=$$

$$=(10^{n+1}-2)^2=(9\underbrace{\ldots}_{n}98)^2.$$

9.6. Заметим, что если точка S лежит внутри или на стороне треугольника PQR (рис. 18), $S\neq Q$, то $|PS|+|SR|<|PQ|+|QR|$. Для доказательства достаточно сложить два очевидных неравенства $|PS|\leqslant|PT|+|TS|$, $|RS|+|TS|\leqslant|TQ|+|QR|$ и заметить, что одно из них будет строгим. Для определенности будем считать, что $|AB|\geqslant|CD|$. Тогда данное неравенство можно переписать в виде

$$|AE|+|ED|+|AB|-|CD|>|BE|+|CE|. \qquad (3)$$

Возьмем на отрезке AB точку A' такую, что $|A'B|=|CD|$. Из замечания следует, что $|AE|+|AB|\geqslant|A'E|+|A'B|$ (рис. 19) и, значит, достаточно доказать неравенство (3) в предположении, что $|AB|=|CD|$. Будем далее считать, что $|AB|=|CD|$. Пусть F — точка, симметричная E относительно середины отрезка AD (рис. 20). Так как $|CE|=|BF|$, $|AF|=|ED|$, то из неравенства $|BF|+|BE|<|AF|+|AE|$, выполняющегося ввиду сделанного выше замечания, следует неравенство (3).

9.7. Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$. Если число c удовлетворяет неравенствам $0<c\leqslant1/4$ и при некотором k справедливы неравенства

$$|x_k|\leqslant c,\ |x_{k+1}|\leqslant\frac{5}{6}c, \qquad (4)$$

то

$$|x_{k+2}|\leqslant|x_{k+1}|^2+\frac{1}{2}|x_k|\leqslant\frac{25}{36}c^2+\frac{1}{2}c=$$

$$=\left(\frac{25}{36}c+\frac{1}{2}\right)c\leqslant\left(\frac{5}{6}\right)^2c.$$

Повторяя эти рассуждения с заменой c на $5c/6$ найдем, что $|x_{k+3}|\leqslant c(5/6)^3$. Действуя далее аналогично, получим неравенство $|x_{k+n}|\leqslant c(5/6)^n$, из которого следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

Осталось доказать, что существует c, $0<c\leqslant1/4$ и некоторый номер k, при которых выполнены неравенства (4). Непосредственно вычислив несколько членов последовательности (x_n), легко убедиться, что неравенства (4) имеют место при $k=7$ и $c=\frac{1}{4}$.

9.8. Предположим, что в некоторое непустое множество A белых клеток можно записать —1 так, что с каждым черным квадратом соседствует четное число клеток из A. Накроем каждую клетку из A повернутым на 45° красным квадратом со стороной $\sqrt{2}$ (за 1 примем сторону клетки). Вершины красных квадратов лежат в центрах черных клеток (либо — в точках контура прямоугольника B 1984×1985, стороны которого отстоят на 1/2 наружу от сторон шахматной доски). Границей красной фигуры служит ломаная, которая может иметь самопересечения в центрах черных клеток доски, но вершины — только в «красных» точках контура B (отстоящих на целое расстояние от вершин прямоугольника B, рис. 21); действительно, угол в 90° или 270° красной фигуры внутри доски означал бы, что к соответствующему черному квадрату примыкает нечетное число белых квадратов из A. Таким образом, граница красной фигуры — замкнутый путь биллиардного шара, отражающегося от сторон под углом 45° в некоторых «красных» точках. На рисунке 11 для шахматной доски 5×6 (ей соответствует прямоугольник B 6×7) показан пример такой замкнутой биллиардной траектории. Но для биллиарда B размерами 1984×1985 замкнутой траектории не существует. Действительно, если выпустить из двух противоположных углов такого биллиарда под 45° к сторонам шарики, то они, отражаясь последовательно от сторон (на каждой стороне после очередного «цикла» точка отражения смещается на 2, рис. 22), пройдут по всем «диагональным» прямым, проходящим под 45° через красные точки. Поэтому любая биллиардная траектория, выходящая под 45° из красной точки, попадет в угол и не может быть замкнутой.

10.5. Решение см. М871 в «Кванте» № 10.

10.6. Ответ: $\ln\frac{101}{100}>\frac{2}{201}$. Решение. Как известно, число $\ln(1+t)$, где $t>0$, равно площади криволинейной трапеции, ограниченной на плоскости XOY прямыми $x=1$, $x=1+t$, $y=0$ и гиперболой $y=\frac{1}{x}$ (рис. 23). Проведем в точке $x=1+\frac{t}{2}$ касательную к гиперболе $y=\frac{1}{x}$. Она отсечет от криволинейной трапеции обычную трапецию $ABCD$ (см. рис. 23). Так как функция $y=\frac{1}{x}$ выпукла вниз, то площадь криволинейной трапеции будет строго больше площади трапеции $ABCD$. Следовательно, для любого $t>0$: площадь криволинейной трапеции $=\ln(1+t)>$ $>S_{ABCD}=t\cdot\frac{1}{1+\frac{t}{2}}=\frac{2t}{2+t}$.

Полагая $t=\frac{1}{100}$, мы получаем нужное неравенство

$$\ln\frac{101}{100}=\ln\left(1+\frac{1}{100}\right)>\frac{\frac{2}{100}}{2+\frac{1}{100}}=\frac{2}{201}.$$

10.7. Ответ: $r=\frac{r_1r_2r_3}{r_1r_2-r_2r_3+r_3r_1}$. Решение см. М872 в «Кванте» № 10.

10.8. Указание. Рассмотрев подходящую развертку куба, оцените площадь сечения через его периметр.

4-я страница обложки

Оригинальность головоломки заключается в том, что ее нельзя сложить последовательным присоединением одной детали к другой. Сначала элементы нужно объединить попарно и только затем соединить в восьмиконечную звезду.

«Квант» для младших школьников»
(см. «Квант» № 9)

1. Ответ. Можно. После вычеркивания должно остаться 361-значное число 41984...1984.

Указание. Сумма цифр числа 1984 равна 22, а так как $1984=90\cdot 22+4$, достаточно вычеркнуть первую восьмерку, оставить цифру 4 и 90 идущих за ней групп ...1984..., а затем вычеркнуть все оставшиеся цифры.

2. Вот одна из возможных расстановок:

$$\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}$$

3. Первым ходом ставится знак + после 1. Затем первый игрок ставит знаки так, чтобы рядом с каждым нечетным числом (слева или справа) стоял знак умножения.

4. Пусть x — цена Шалтая, а y — цена Болтая. Тогда $175x-125y=25(7x-5y)\geqslant 25$, а $126y-175x=7(18y-25x)\geqslant 7$. Поэтому $y=126y-125y=126y-175x+175x-125y\geqslant 7+25=32$. Итак, Болтай стоит не меньше 32 копеек, но Шалтай стоит больше, чем $\frac{5}{7}y=\frac{5}{7}\cdot 32$, то есть не меньше 23 копеек.

Поэтому на покупку 3-х Шалтаев и 1-го Болтая потребуется не меньше, чем $3\cdot 23+32=101$ коп.

5. Треугольники ABD и BCD равны по трем сторонам. Поэтому равны углы DBA и CDB и, следовательно, $\triangle BOD$ — равнобедренный.

Кубический кроссворд

(см. «Квант» № 9)

1. Берклий. **2.** Гиперон. **3.** Вавилов. **4.** Миллион. **5.** Калория. **6.** Харитон. **7.** Андреев. **8.** Кипение. **9.** Биллион. **10.** Галилей. **11.** Линейка. **12.** Подобие. **13.** Касание. **14.** Бонокль. **15.** Полином. **16.** Вивиани. **17.** Алгебра. **18.** Корифей. **19.** Никомед. **20.** Позитив. **21.** Водород. **22.** Скаляры. **23.** Феномен. **24.** Дирихле. **25.** Медиана. **26.** Гипатия. **27.** Ванадий.

Шахматная страничка

(см. «Квант» № 7)

Задание 13 (В. Брон, 1947 г.). **1. Kg6! Фd5+ 2. Kpa1 e5! 3. Ke7 Фe6 4. Kpb1 g6! 5. Kpa1!!** Таким удивительным образом белый король обманывает... кого бы вы думали? — черную пешку «g»! К ничьей ведет 5. Kpb2 g5! 6. Kpb1 g4 7. Kpb2 Фh6 — пешка продвинулась вперед и освободила путь ферзю, а белый король не успел занять поле c3. **5...g5 6. Kpb2! g4 7. Kpc3! Фa2 8. Лb3+**, и ферзь погибает.

Задание 14 (Г. Надарейшвили, 1970 г.). Вот что сказал по поводу этого этюда М. Таль: «Позиция словно выхвачена из окончания практической партии. Может показаться, что, поскольку пешки проходят в ферзи одновременно, достижение ничьей особого труда не доставляет, но впечатление это обманчиво». Действительно, нельзя, например, играть 1. Kpc7 из-за 1...d1Ф 2. b8Ф Фd7×. **1. Kpa8!! Kd7 2. e6 d1Ф 3. ed** Ф:d7 4. b8Ф Kpa6 5. Фd6+! Ф:d6 пат; 3...Kpa6 4. b8K+! Kpb6 5. d8Ф+! Ф:d8 — еще один пат со связкой коня. Как видите, под внешней простотой формы кроется довольно богатый этюдный сюжет — патовые идеи, слабое превращение и позиционная ничья.

Номер подготовили:
А. Н. Виленкин, В. Н. Дубровский, А. А. Егоров, Б. М. Ивлев, Т. С. Петрова, А. Б. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
О. Н. Грачев, В. С. Коваль, Т. Н. Кольченко, С. Ф. Лухин, Э. В. Назаров, И. Е. Смирнова, Е. К. Тенчурина, П. Э. Чудновский, Е. С. Шабельник

Фото представили:
З. М. Хачикян, В. Н. Шевченко

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Редактор отдела художественного оформления Э. А. Смирнов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор Е. В. Сидоркина

103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант», тел. 250-33-54

Сдано в набор 20.9.84
Подписано к печати 18.10.84
Печать офсетная
Бумага $70\times 108^1/_{16}$. Усл. кр. от. 23,8
Усл. печ. л. 5,6 Уч.-изд. л. 7,31 Т-21302
Цена 40 коп. Заказ 2506. Тираж 172 782 экз.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

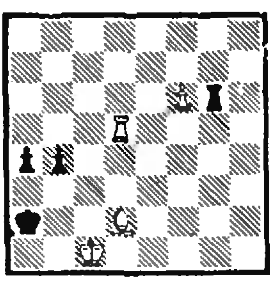
Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

ЭТЮДЫ КАСПАРЯНА

Мы уже рассказывали о трех гроссмейстерах по шахматной композиции. Теперь осталось познакомиться с творчеством старейшего советского этюдиста — Генриха Каспаряна.

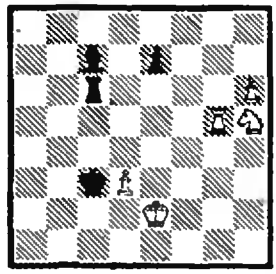
Представьте себе, что все шахматные композиторы мира решили выяснить, кто из них лучший шахматист. Победителем этого интересного состязания наверняка выйдет Г. Каспарян. Ведь он не только международный гроссмейстер по композиции, но и международный мастер по «обычным» шахматам, участник четырех чемпионатов страны.

Посмотрите ряд этюдов Каспаряна, которые он относит к числу своих лучших произведений.



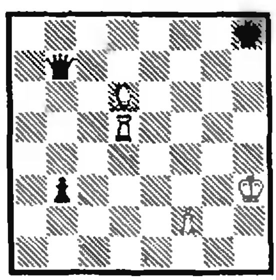
Г. Каспарян, 1939 г. Выигрыш.

Глядя на исходную позицию, трудно предположить, что нас ожидает острая борьба с эффектным финалом. **1. Cg5 b3 2. Лd2+ Кра1 3. f7** (но не 3. Се3 b2+ 4. Л:b2 Л:f6 5. Cd4 Лf1+ 6. Крс2 а3! 7. Лb1++ Кра2 8.Л:f1 пат) **3...Л:g5! 4. f8Ф.** У белых на доске лишний ферзь, но успокаиваться рано. **4...Лg1+ 5. Лd1 Лg2 6. Фа3+ Ла2 7. Лd2!! Л:а3 8. Лb2.** Парадоксальная ситуация. У черных материальный перевес, который сохраняется до самого конца. **8...Ла2 9. Лb1×.** Простота формы в этом этюде сочетается с удивительной глубиной содержания.



Г. Каспарян, 1946 г. Выигрыш.

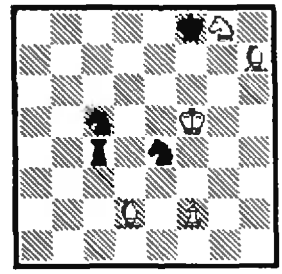
В этом этюде соединены обе грани таланта Каспаряна — практическая игра и композиция. Идея возникла из легкой партии, а обработанное произведение отвечает самым строгим требованиям этюдного искусства. **1. Kg7! Л:h6 2. Лс5+ Kpd4 3. Лс4+ Кре5 4. Л:с7 Kpf6 5. Ке8+ Kpf7 6. Лс8 Ле6+! 7. Kpd1!!** О смысле этого хода пока трудно догадаться. **7...Лg6! 8. Кс7!** Грозило 8...Лg8, выигрыш выпускало 8. Ла8? Лс6! 9. Кре2 Лс2+ 10. Кре3 Лс1 11. Кре4 Лс2 12. Kpd5 Лс1 13. d4 Лс2 14. Kd6+ ed 15. Кр:d6 Лd2 16. d5 Лd1 с теоретической ничьей. **8... Лс6! 9. Kpd2!!** Теперь понятно, что 7. Kpd2? Лg6! 8. Кс7! Лс6! вело к ничьей — 9. d4 Лс4 10. d5 Kpg6. Ну, а сейчас в цугцванг попадают черные. **9...Лс5 10. Лf8+!,** и конь вырывается на свободу.



Г. Каспарян, 1949 г. Ничья.

Одно из самых трудоемких творений гроссмейстера — работа над ним продолжалась три года.

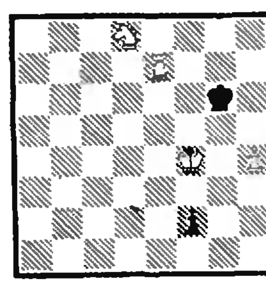
Были проанализированы десятки различных вариаций, пока не удалось уложиться в рамках миниатюры (на доске 7 фигур). **1. Се5+ Kpg8! 2. Лd8+! Kpf7 3. Лd3 Кре6! 4. Ле3 Фh1+** (4...Kpf5 5. Kph2 Фh7+ 6. Kpg1 Фg6+ 7. Kpf1! Фа6+ 8. Kpg1 с ничьей) **5. Ch2+ Kpf5 6. Л:b3.** Наконец-то пешка уничтожена, но черные неожиданно переходят в атаку. **6...Фf1+ 7. Kpg3 Фс4! 8. Лf3+ Kpg5 9. Cg1! Фg4 + 10. Kph2 Ф:f3 пат.**



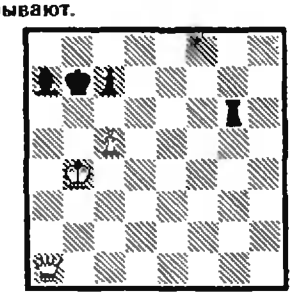
Г. Каспарян, 1970 г. Ничья.

1. Ch6+ Kpf7 2. Кре5 Kd7+ 3. Kpd5 Kb6+ 4. Кре5 K:f2 5. Kf6! Лс6! 6. Cg8+! Kpg6 7. Се3! Л:f6 8. Ch7+! Kpg7 9. Cd4! Белые как ни в чем не бывало играют без ладьи. Замечательная иллюстрация преимущества двух слонов! **9...Лh6 10. Cf5! Kh1! 11. Се6! Ка8.** Черные кони, как по мановению волшебной палочки, оказались в противоположных углах доски. **12. Cd5! Кс7 13. С:h1 Л:h1 14. Kpd6+,** и белые спаслись. Есть и другой вариант, симметричный первому относительно диагонали а1 — h8: 8...Kpf7 9. Cg8+! Kpg7 10. Cd4 Лf8! 11. Се6! Ка8 12. Cf5! Kh1 13. Се4! Kg3 14. С:а8! Л:а8 15. Kpf4+ с ничьей. Грандиозное сражение, охватывающее чуть ли не всю доску. Каспарян относит этот этюд к своим высшим достижениям.

Конкурсные задания



21. Белые начинают и выигрывают.



22. Белые начинают и выигрывают.

Срок отправки решений — 25 января 1985 г. (с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 21, 22»).

Цена 40 коп.

Индекс 70465

ИГРЫ И ГОЛОВОЛОМКИ

Синий 24-х гранник, изображенный на рисунке справа, был открыт великим астрономом и математиком Иоганном Кеплером в 1619 году. Он назвал его Stella octangula («звезда восьмиугольная» по латыни) в связи с тем, что его 24 грани расположены на 8 плоскостях. Посмотрев на него внимательно, можно заметить, что Stella octangula Кеплера — объединение двух пересекающихся правильных тетраэдров, вершины которых образуют куб.

Звездчатый многогранник Кеплера можно разрезать на четыре одинаковых части (слева на рисунке) и превратить в интересную головоломку. Каждая часть вырезается из тонкого картона или плотной бумаги по развертке, приведенной на рисунке снизу, и склеивается. Головоломка состоит в том, чтобы собрать многогранник Кеплера из четырех таких деталей. Ее прислал нам Игорь Глушков из Обнинска.